



中华人民共和国国家计量技术规范

JJF 1152—2006

任意波发生器校准规范

Calibration Specification of Arbitrary Waveform Generator

2006-05-23 发布


2006-08-23 实施

国家质量监督检验检疫总局 发布

JJF 1152—2006

任意波发生器校准规范

Calibration Specification
of Arbitrary Waveform Generator



JJF 1152—2006

本规范经国家质量监督检验检疫总局 2006 年 5 月 23 日批准，并自 2006 年 8 月 23 日起施行。

归口单位：全国无线电计量技术委员会

负责起草单位：北京长城计量测试技术研究所

中国计量科学研究院

参加起草单位：信息产业部电子计量中心

本规范由全国无线电计量技术委员会负责解释

JJF 1152—2006

本规范主要起草人：

梁志国 (北京长城计量测试技术研究所)

孙璟宇 (北京长城计量测试技术研究所)

缪京元 (中国计量科学研究院)

参加起草人：

曹英杰 (北京长城计量测试技术研究所)

胡菊萍 (信息产业部电子计量中心)

目 录

1 范围	(1)
2 引用文献	(1)
3 术语和定义	(1)
3.1 任意波发生器	(1)
3.2 周期波形的总失真度	(1)
3.3 抖动	(2)
4 概述	(2)
5 计量特性	(3)
6 校准条件	(3)
6.1 环境条件	(3)
6.2 校准用仪器设备	(3)
7 校准项目和校准方法	(5)
7.1 工作正常性检查	(5)
7.2 量程及幅度分辨力	(5)
7.3 频率范围、频率分辨力、频率误差、频率稳定度、 频率漂移及 D/A 取样速率	(6)
7.4 瞬态特性	(7)
7.5 通道间延迟时间差	(8)
7.6 相位差	(10)
7.7 正弦信号波形参数(总失真度、幅度、频率、直流偏置、 幅度平坦度)及交流增益	(11)
7.8 正弦波形参数的抖动	(13)
7.9 调幅信号特性	(16)
7.10 调频信号特性	(17)
7.11 调相信号特性	(18)
7.12 周期波形总失真度	(21)
7.13 周期波形的相关系数	(23)
7.14 周期波形的谐波波谱	(24)
7.15 斜坡、三角波波形参数	(25)
7.16 静态特性	(27)

JJF 1152—2006

7.17 输出电阻	(29)
8 校准结果表达	(29)
9 复校时间间隔	(30)
附录 A 任意波发生器校准结果记录格式	(31)
附录 B 正弦波形序列的最小二乘拟合算法	(35)
附录 C 信号周期精确测量算法	(43)
附录 D 任意波发生器分辨力精确测量方法	(46)
附录 E 测量不确定度评定	(47)

任意波发生器校准规范

1 范围

本规范适用于新制造、使用中和修理后的,采用数字化存储技术、使用 D/A 转换器并能将所存储的波形数据以模拟信号方式输出的各种任意波发生器的校准。其他信号源相应参数的校准可参照执行。

2 引用文献

GB 9318—1988 脉冲信号发生器测试方法

IEC Standard, Publication 624, Expression of the Performance of Pulse Generators, International Electrical Commission, 1978

IEEE Std 746—1984, IEEE Standard for Performance Measurements of A/D and D/A Converters for PCM Television Video Circuits

IEEE Std 1057—1994, IEEE Standard for Digitizing Waveform Recorders, Dec. 1994
使用本规范时,应注意使用上述引用文献的现行有效版本。

3 术语和定义

3.1 任意波发生器 (Arbitrary Waveform Generator)

能将具有幅度量化特征和时间抽样特点的离散数据组按顺序发出,生成模拟信号波形的一种数字化模拟信号发生装置。

3.2 周期波形的总失真度 (Total Distortion of Periodic Waveform)

周期信号的实际波形与其最优期望波形间残差有效值和最优期望波形交流分量有效值之比定义为其总失真度。

对于周期为 T 的已知信号 $x(t)$, 其实际波形函数为 $y(t)$, 存在实数 G 、 D 、 t_0 , 且 $f(t) = G \cdot x(t) + D$, 使得 $\epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [y(t) - f(t - t_0)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [y(t) - G \cdot x(t - t_0) - D]^2 dt}$ 为最小, 若 $\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$; $f_r = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - \bar{f}]^2 dt}$; 则 $y(t)$ 相对于其最优期望波形的总失真度 TD 定义为:

$$TD = \epsilon_{\text{rms}} / f_r$$

其中, t_0 是 $y(t)$ 与 $x(t)$ 之间的时间延迟; G 为波形比例因子; D 为波形位置偏移量; $x(t)$ 为期望波形; $f(t - t_0)$ 为最优期望波形; \bar{f} 为最优期望波形的均值; f_r 为

JJF 1152—2006

最优期望波形交流分量的有效值； ϵ_{rms} 是 $y(t)$ 与最优期望波形 $f(t - t_0)$ 之间的残差有效值，表述波形失真。

3.3 抖动(Jitter)

具有确定模型的信号，其模型参数在短期内随时间变化产生的波动。

4 概述

任意波发生器的典型框图如图 1 所示，它是以 D/A 转换器为核心，由时钟电路、存储器电路、控制逻辑(计数器电路、地址译码电路)、CPU、滤波器和放大器等环节组成的，能将具有幅度量化特征和时间抽样特点的离散数据组按顺序发出，生成模拟信号波形的一种数字化模拟信号发生装置。

其技术内涵和实质是使用离散的数字化方式产生连续的模拟信号波形；用有限个量值状态及其阶跃过渡过程描述具有无限个量值状态的信号波形。

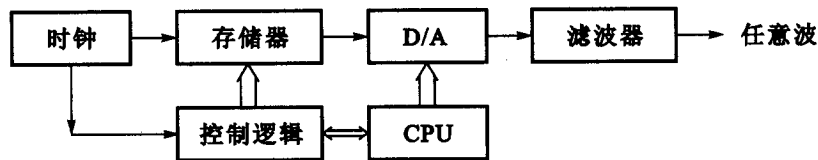


图 1 任意波发生器典型框图

如图 2 所示，假设要用任意波发生器输出的波形曲线为 $x_0(t)$ ，则在任意波发生器内 $x_0(t)$ 被幅度量化和时间抽样后形成如图中方格轮廓节点所表示的数组 $\hat{x}_0(t_i)$ ， $i = 0, \dots, n-1$ ，经过 D/A 转换器，输出如图中方格轮廓节点所表示的波形，通过滤波器滤波后，最终输出信号波形 $x(t)$ 。可见，本意是产生波形曲线 $x_0(t)$ ，实际上产生的是信号波形 $x(t)$ ， $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 的符合程度及符合能力，即是任意波发生器校准的本质。

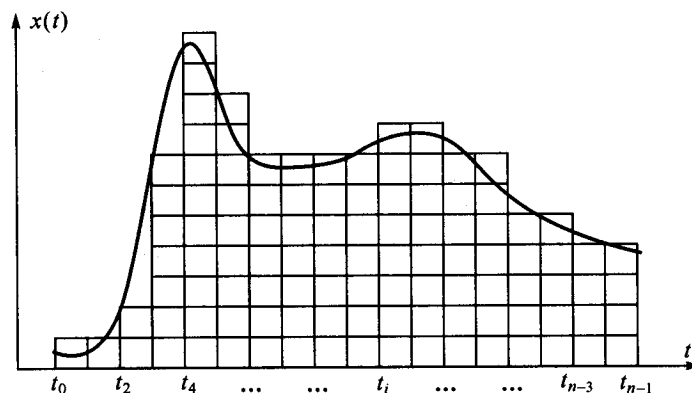


图 2 任意波发生器波形输出示意图

任意波发生器的技术指标众多，但校准的实质只有两条，其一是校准它产生任意波形能力的极限及执行参数值，如取样速率、压摆率、建立时间、量程、分辨力、存储深度等；其二是评价它产生的任意波形中每一个与标称数据点相对应的输出点的准确度，包括幅值准确度和时间准确度，如失真度、线性度、抖动等。

5 计量特性

使用本规范执行校准时，所能覆盖的各参数测量范围及指标，仅受测量结果的不确定度要求和所用标准仪器设备性能指标的限制，而规范本身对它们并无特别限制。用于任意波发生器主要技术性能指标校准的典型波形有：具有已知函数关系的周期性任意波形、方波、正弦波、斜波、调幅波、调频波、调相波、指数升、指数降波形。其典型计量特性为：

幅度范围：	$\pm(1\text{mV}\sim 20\text{V})$
幅度最大允许误差：	$\pm 1\%$
频率范围：	DC~1GHz
频率最大允许误差：	$\pm 1\times 10^{-6}$
取样速率：	1Sample/s~10GSample/s;
取样速率最大允许误差：	$\pm 1\times 10^{-6}$
上升时间：	1ns
建立时间：	250ns
抖动：	25ns
相位差最大允许误差：	$\pm 0.1^\circ$
正弦波形总失真度：	0.1%
正弦波幅度平坦度：	$\pm 0.03\text{dB}$
线性度：	0.1%
周期波形总失真度：	0.1%
谐波波谱测量分析：	DC~600MHz
微分非线性：	$\pm 0.2\text{LSB}$
积分非线性：	$\pm 0.5\text{LSB}$

6 校准条件

6.1 环境条件

供电电源：	电压： $(220\pm 11)\text{V}$ ，频率： $(50\pm 1)\text{Hz}$
环境温度：	$(23\pm 5)^\circ\text{C}$
相对湿度：	$\leq 80\%$
大气压强：	$(86\sim 106)\text{kPa}$

校准过程中，周围无任何影响任意波发生器及其校准系统性能的振动、冲击及电磁辐射等。

6.2 校准用仪器设备

校准中所用全部仪器设备应在计量有效期内，并有效溯源到国家基准。

JJF 1152—2006

6.2.1 校准用主要仪器设备

- (1) 数字存储示波器；
- (2) 时间频率计数器；
- (3) 数字电压表；
- (4) 电子计算机系统；
- (5) 失真度分析仪；
- (6) 相位计；
- (7) 频谱分析仪；
- (8) 功率计；
- (9) 测量接收机；
- (10) 调制度分析仪；
- (11) 热电比较仪；
- (12) 调制域分析仪。

6.2.2 仪器设备技术要求

a) 波形测量所用的数字存储示波器，其频带宽度应大于被测信号有效带宽。具体说来，对于方波和近方波类信号，示波器带宽应大于基波频率的 10 倍以上；而对于正弦波和近正弦类平滑波形，示波器带宽应大于基波频率的 5 倍以上。其幅度误差应优于 1%；时基误差应不大于被校任意波发生器周期和频率误差的 1/3。

b) 测量斜波类信号时，要求示波器的线性度小于被校任意波发生器线性度的 1/3。

c) 校准任意波发生器产生正弦波或周期信号的总失真度时，示波器有效位数对应的噪信比应小于被测信号总失真度的 1/3。

d) 校准上升时间时，数字存储示波器的上升时间应不大于被校任意波发生器上升时间的 1/3。

e) 频率和取样速率校准中使用的时间频率计数器，其幅度要求应适合被校任意波发生器幅度值要求；其周期频率测量范围应覆盖被校任意波发生器产生信号的周期和频率范围，频率周期测量误差应不大于被校任意波发生器周期和频率误差的 1/10；分辨力优于测量误差的 1/10。

f) 静态幅度校准中使用的数字电压表，其幅度测量误差应不大于被校任意波发生器幅度误差的 1/3；幅度分辨力应优于被校任意波发生器幅度调节细度的 1/3；其幅度测量范围应能覆盖任意波发生器幅度的量程范围。

g) 使用直接测量法校准所用的其他标准仪器设备，原则上均按其最大允许误差优于被校仪器参数最大允许误差的 1/3 选取。

注：本节中，对于校准仪器与被校准仪器相应参数误差间的 1/3 或 1/10 关系要求，从校准的技术内涵来说，并非必要要求。仅是为保证被校仪器的不确定度分量在最终测量结果的不确定度中占据主导地位而作的规定，可参照执行。

JJF 1152—2006

7 校准项目和校准方法

7.1 工作正常性检查

7.1.1 外观检查

被校准的任意波发生器，应配有使用说明书和相应的编程软件资料；应具有产品合格证书以及全部必备附件。任意波发生器的外形结构应完好。开关、按键、旋钮等，操作灵活可靠，标志清晰明确，外露件不应有松动和机械损伤。其铭牌或外壳上应标明其名称、生产厂家、型号、编号和出厂日期。供电电源的标志及电压和频率范围指示明确。

7.1.2 通电检查

外观检查后，按使用说明书给任意波发生器通电、预热。让其执行自检及自校准。

按使用说明书要求作标准波形输出特性检查，使用数字存储示波器测量检查波形情况。

按使用说明书要求及随机提供的软件，作任意波发生器与通用电子计算机通信功能的检查，应能准确无误地进行数据交换。

将任意已知的信号数据序列（一般在通道量程的 50%~90% 以内）通过计算机或其他方式输入任意波发生器，检查其波形序列存储和输出工作状态。

必要时，对任意波发生器说明书中列出的其他功能进行检查。以上各项检查均应正常。

7.2 量程及幅度分辨力

接线如图 3，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字电压表与被校任意波发生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率和波形存储深度（波形序列长度），令直流偏置为 0，使任意波发生器分别输出本量程下其标称最高幅度直流信号 x_{\max} 和标称最低幅度直流信号 x_{\min} ，用数字电压表读取相应的最高幅度测量值 y_{\max} 和最低幅度测量值 y_{\min} 。则，任意波发生器的量程 y_R ：

$$y_R = y_{\max} - y_{\min} \quad (1)$$

使任意波发生器分别输出本量程下，幅度相邻的两个 D/A 数字码相对应的（接近 0 值的）直流信号 x_1 和 x_2 ，用数字电压表读取相应的测量值 y_1 和 y_2 。则，任意波发生器本量程的幅度分辨力 Δy ：

$$\Delta y = |y_1 - y_2| \quad (2)$$



图 3 任意波发生器静态特性校准连线框图

JJF 1152—2006

注：若需要测量 0 值点以外较大幅值处的幅度分辨力，按附录 D 所述方法执行。

7.3 频率范围、频率分辨力、频率误差、频率稳定度、频率漂移及 D/A 取样速率

7.3.1 方法一（时间频率计数器法）

接线如图 4，选定任意波发生器的校准通道及量程，时间频率计数器与被校任意波发生器匹配连接。选取一种形状已知的周期信号波形数据，设定任意波发生器的 D/A 取样速率 $v = v_0$ 、每个信号周期数据点数 $N_T \geq 3$ 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，将波形数据存入波形存储区，并循环输出该波形。用时间频率计数器读取该信号的频率 f 。则，任意波发生器的频率误差 Δf ：



图 4 任意波发生器稳态特性校准连线框图

$$\Delta f = \frac{v_0}{N_T} - f \quad (3)$$

频率相对误差：

$$\Delta f_r = \frac{v_0}{N_T \cdot f} - 1 \quad (4)$$

取样速率：

$$v = N_T \times f \quad (5)$$

取样速率误差：

$$\Delta v = v_0 - v \quad (6)$$

取样速率相对误差：

$$\Delta v_r = \frac{v_0 - v}{v} \quad (7)$$

在时间 3h 内，大致均匀地获取同一频率的 m ($m \geq 15$) 个测量结果 f_i ($i = 0, 1, \dots, m-1$)，每个测量结果值 f_i 可以是极短时间 τ 内一组值的均值。则，任意波发生器频率稳定度 $S_f(\tau)$ 为：

$$S_f(\tau) = \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{m-2} (f_{i+1} - f_i)^2}{2(m-1)}} \quad (8)$$

频率漂移 $\delta_f(\tau)$ 为：

$$\delta_f(\tau) = \max \left| \frac{f_i - f_0}{f_0} \right|_{i=1, \dots, m-1} \quad (9)$$

在每个信号周期数据点数 N_T 确定的前提下，调整任意波发生器的 D/A 取样速率 v ，使其分别达到标称最高值 $v_{0\max}$ 和标称最低值 $v_{0\min}$ ，由时间频率计数器分别读取相

JJF 1152—2006

应信号的最高频率 f_{\max} 和最低频率 f_{\min} , f_{\max} 和 f_{\min} 两者间的范围即是上述条件下任意波发生器输出频率范围。

在约定条件下,用频率测量仪器测量确定的、任意波发生器所能产生的、最接近的两个相邻频率之间隔,即是其在该条件下的频率分辨力。

7.3.2 方法二(正弦波拟合法)

执行 7.7.1.1, 获得信号频率 f , 参照 7.3.1, 按式 (3)~(9) 计算, 获得频率范围、频率分辨力、频率误差、频率稳定度、频率漂移、D/A 取样速率等参数的测量结果。

7.4 瞬态特性(上升时间、建立时间、压摆率、振铃(正弦振荡)、方波幅度、占空比)

7.4.1 接线如图 5, 选定任意波发生器的校准通道及量程, 数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$, 选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期), 令直流偏置为 0, 将方波信号波形数据存入波形存储区, 并循环输出该波形;

其中, 方波周期 T 应远大于任意波发生器内 D/A 的建立时间 t_s 。一般选取 $T > 4t_s$ 。

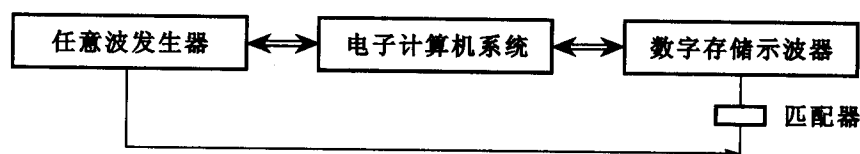


图 5 任意波发生器波形特性校准连线框图

7.4.2 调整数字存储示波器的量程、时基和触发, 执行波形测量, 获得如图 6 所示的阶跃波形显示。读取图 6 所示的阶跃上升时间 t_r 、方波脉冲幅度 A 、预冲幅度 a 、过冲幅度 b 、振铃 c 各值。

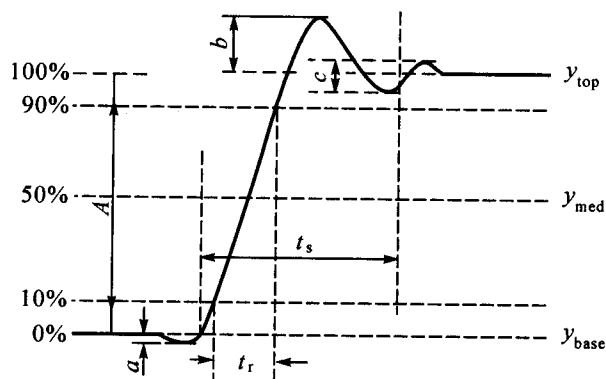


图 6 阶跃信号波形示意图

数字示波器的上升时间为 t_0 ; 则任意波发生器的瞬态脉冲参数按式 (10)~(14)

分别计算：

上升时间：
$$t_{rs} = \sqrt{t_r^2 - t_0^2} \quad (10)$$

预冲：
$$\delta_a = a/A \quad (11)$$

过冲：
$$\delta_b = b/A \quad (12)$$

顶部不平度：
$$\delta_c = c/A \quad (13)$$

在脉冲中值 y_{med} 附近实际测量出时间变化 Δt 所对应的幅度变化量 Δy ，则阶跃脉冲压摆率：

$$\delta_x = \Delta y / \Delta t \quad (14)$$

设确定阶跃脉冲建立时间的幅度误差界为 Δy_{max} ，则如图 6 所示，读取从阶跃波形沿与底值线交点至阶跃振铃波动完全落入区间 $[y_{top} - \Delta y_{max}, y_{top} + \Delta y_{max}]$ 的起始点之间的时间差 t_s ，即为任意波发生器的阶跃脉冲建立时间。

注：上升时间 t_r 、建立时间 t_s 、方波脉冲幅度 A 、预冲幅度 a 、过冲幅度 b 和振铃 c 各值，可以使用波形测量序列由众数法等方法计算分析获得，也可以使用数字存储示波器的相应测量功能直接测量获得。

7.4.3 重新调整数字存储示波器的时基和触发，执行波形测量，获得图 7 所示的方波波形。

用众数法计算获得波形的顶值 y_{top} 、底值 y_{base} 、中值 y_{med} 。幅值 $A = y_{top} - y_{base}$ ；从信号序列中截取恰好含有整数个信号波形周期的序列段 $y_i (i = 1, \dots, n)$ ；统计 n 个样本数据中大于中值 y_{med} 的采样点数 n_u 和小于中值 y_{med} 的采样点数 $n_d = n - n_u$ ，则方波 $y(t)$ 的占空比 ζ ：

$$\zeta = \frac{n_u}{n_d} \quad (15)$$

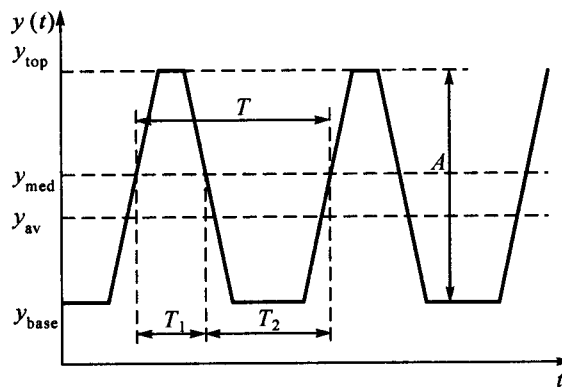


图 7 方波信号模型化表述曲线图

注：方波的顶值 y_{top} 、底值 y_{base} 、中值 y_{med} 、幅值 A 和占空比 ζ 可以使用数字存储示波器的相应测量功能直接测量获得。

7.5 通道间延迟时间差

JJF 1152—2006

7.5.1 方法一（正弦波拟合法）：

接线如图 8 所示，选定任意波发生器的校准通道 α 和 β 及量程，选定数字存储示波器的两个测量通道 ch1 与 ch2，通道 ch1 对 ch2 延迟时间差为 τ_{12} ，通道 α 与 β 的连接电缆电气特性应一致，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直流偏置为 0，将两个通道 α 和 β 的同相位正弦信号波形数据存入各自的波形存储区，并循环输出该正弦波形。其频率 $f_0 = \frac{v_{0\max}}{N_T}$ 。

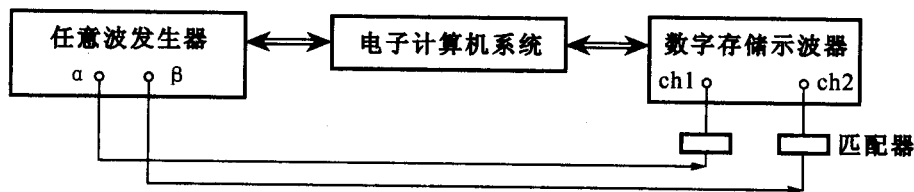


图 8 任意波发生器双通道波形特性校准连线框图

选择数字存储示波器各测量通道的量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ ；设置测量通道 ch1 与 ch2 为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个信号周期采集 3 个点以上；可按式 (16) 选取采样速率 v_a ：

$$v_a = n \cdot f_0 / N_c \quad (16)$$

式中， v_a 为通道采集速率， f_0 为信号频率标称值， N_c 为通道采集的 n 个数据中所含信号整周期个数，其中， N_c 与 n 不能有公因子。

执行采集，获得采集通道 ch1 与 ch2 的数据 y_{1i} 和 y_{2i} ($i = 1, \dots, n$)；输入计算机。

按最小二乘法对两个通道 ch1 与 ch2 的采集数据分别进行正弦波拟合，求出各自的正弦拟合信号： $y_1(i) = C_1 \sin(\omega i + \theta_1) + D_1$ 和 $y_2(i) = C_2 \sin(\omega i + \theta_2) + D_2$ ，则，通道 α 超前通道 β 的时间 $t_{\alpha\beta}$ 为：

$$t_{\alpha\beta} = (\theta_1 - \theta_2) / (\omega \cdot v_a) + \tau_{12} \quad (17)$$

注：通道间延迟时间差也可以使用数字存储示波器的时间差测量功能直接测量获得，但要考虑消除引线和示波器通道固有延迟的影响。

7.5.2 方法二（相位计法）：

接线如图 9 所示，选定任意波发生器的校准通道 α 和 β 及量程，选定相位计的两个测量通道 ch1 与 ch2，通道 α 与 β 的连接电缆电气特性应一致，相位计与被校任意波发生器匹配连接。

设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直

JJF 1152—2006

流偏置为 0，将两个通道 α 和 β 的同相位正弦信号波形数据存入各自的波形存储区，并循环输出该正弦波形。其频率 $f_0 = v_{0\max}/N_T$ 。

用相位计读取任意波发生器频率 f_0 下通道 α 和 β 信号的相位差 $\theta_{\alpha\beta}$ 。则通道 α 超前通道 β 的时间 $t_{\alpha\beta}$ 为：

$$t_{\alpha\beta} = \frac{\theta_{\alpha\beta}}{2\pi f_0} \quad (18)$$

7.6 相位差

7.6.1 方法一（正弦波拟合法）

接线如图 8 所示，选定任意波发生器的校准通道 α 和 β 及量程，选定数字存储示波器的两个测量通道 ch1 与 ch2，通道 ch1 对 ch2 延迟时间差为 τ_{12} ，通道 α 与 β 的连接电缆电气特性应一致，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直流偏置为 0，将正弦信号波形 $x_\alpha(t_i) = C_{\alpha 0} \sin(2\pi f_0 t_i)$ 数据存入通道 α 的波形存储区，将正弦信号波形 $x_\beta(t_i) = C_{\beta 0} \sin(2\pi f_0 t_i + \theta_{\alpha\beta 0})$ 数据存入通道 β 的波形存储区，通道 α 和 β 均循环输出各自的正弦波形。其频率 $f_0 = v_{0\max}/N_T$ 。

选择数字存储示波器各测量通道的量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。设置测量通道 ch1 与 ch2 为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个信号周期采集 3 个点以上；可按式 (16) 选取采样速率 v_a 。

执行采集，获得采集通道 ch1 与 ch2 的数据 y_{1i} 和 y_{2i} ($i = 1, \dots, n$)；输入计算机。

按最小二乘法对两个通道 ch1 与 ch2 的采集数据分别进行正弦波拟合，求出各自的正弦拟合信号： $y_1(i) = C_1 \sin(\omega i + \theta_1) + D_1$ 和 $y_2(i) = C_2 \sin(\omega i + \theta_2) + D_2$ ，则通道 α 与通道 β 的相位差 $\theta_{\alpha\beta}$ 为：

$$\theta_{\alpha\beta} = (\theta_1 - \theta_2) + \tau_{12} \omega \cdot v_a \quad (19)$$

相位差 $\theta_{\alpha\beta}$ 的误差：

$$\Delta\theta = \theta_{\alpha\beta 0} - \theta_{\alpha\beta} \quad (20)$$

注：相位差也可以使用数字存储示波器的相位测量功能或时间差测量功能直接测量获得，但要考虑消除引线和示波器通道固有延迟的影响。

7.6.2 方法二（相位计法）

接线如图 9 所示，选定任意波发生器的校准通道 α 和 β 及量程，选定相位计的两个测量通道 ch1 与 ch2，通道 α 与 β 的连接电缆电气特性应一致，相位计与被校任意波发生器匹配连接。

设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$ ，选取每个信号周期

JJF 1152—2006

数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期), 令直流偏置为 0, 其频率 $f_0 = v_{0\max}/N_T$ 。将正弦信号波形 $x_\alpha(t_i) = C_{\alpha 0} \sin(2\pi f_0 t_i)$ 数据存入通道 α 的波形存储区, 将正弦信号波形 $x_\beta(t_i) = C_{\beta 0} \sin(2\pi f_0 t_i + \theta_{\alpha\beta 0})$ 数据存入通道 β 的波形存储区, 通道 α 和 β 均循环输出各自的正弦波形。用相位计读取任意波发生器频率 f_0 下通道 α 和 β 信号的相位差 $\theta_{\alpha\beta}$:

$$\theta_{\alpha\beta} = (\theta_1 - \theta_2) \quad (21)$$

$$\Delta\theta = \theta_{\alpha\beta 0} - \theta_{\alpha\beta} \quad (22)$$

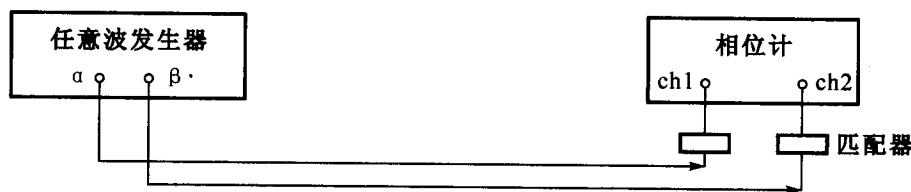


图9 任意波发生器相位特性校准连线框图

7.7 正弦信号波形参数（总失真度、幅度、频率、直流偏置、幅度平坦度）及交流增益

7.7.1 幅度、频率、直流偏置、交流增益

7.7.1.1 方法一（正弦波拟合法）

接线如图5, 选定任意波发生器的校准通道及量程, 数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接, 且其在频率 f_0 下的动态有效位数（或实际 A/D 位数）为 b 。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$, 选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期), 令直流偏置为 0, 将正弦信号波形 $x(t_i) = C_0 \sin(2\pi f_0 t_i)$ 数据存入波形存储区, 并循环输出该波形。其频率 $f_0 = v_{0\max}/N_T$ 。

选择数字存储示波器的测量通道和量程, 使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%; 调整触发, 使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。设置测量通道采样速率 v_a , 使每个信号周期采集 3 个点以上; 可按式 (16) 选取采样速率 v_a 。

执行采集, 获得波形采集数据 $y_i (i=1, \dots, n)$; 输入计算机。

按最小二乘法对通道采集数据进行正弦波拟合, 即通过变化 C 、 ω 、 θ 、 D , 使得

$$\epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - C \sin(\omega i + \theta) - D)^2} \text{ 最小, 求出拟合正弦信号:}$$

$$y(i) = C \sin(\omega i + \theta) + D \quad (23)$$

其中, $y(i)$ 为拟合信号的瞬时值, C 为拟合正弦信号的幅度, θ 为拟合正弦信号的初相位 (弧度), D 为拟合信号的直流分量值 (直流偏置实测值), ω 为拟合正弦信号的离散角频率 ($2\pi f/v_a$)。信号频率 f_0 测量值 f :

JJF 1152—2006

$$f = \frac{\omega \cdot v_a}{2\pi} \quad (24)$$

交流增益 G :

$$G = \frac{C}{C_0} \quad (25)$$

注：正弦波形的幅度、频率参数，可以使用数字存储示波器的相应测量功能直接测量获得，直流偏置可以由整周期平均值 (average) 功能或顶值 (top) 与底值 (base) 的平均值获得，交流增益由幅度和标称输入值按式 (25) 计算获得。

7.7.1.2 方法二 (直接测量法)

正弦波形的幅度由功率计 (或测量接收机、或热电比较仪、或数字电压表、或取样示波器) 直接测量获得。交流增益由幅度和标称输入值按式 (25) 计算获得。

正弦波形的频率由时间频率计数器按 7.3.1 所述方法直接测量获得。

7.7.2 总失真度

7.7.2.1 方法一 (正弦波拟合法)

执行 7.7.1.1 的校准过程，获得正弦波拟合参数，按式 (26) 计算等效噪声有效值 ϵ_{rms} ：

$$\epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - C \sin(\omega i + \theta) - D)^2} \quad (26)$$

则，被测量正弦信号波形总失真度：

$$TD = \sqrt{\left| \frac{\epsilon_{\text{rms}}^2}{C^2/2} - \frac{1}{2^{2 \cdot b-1} \cdot 3 \cdot \eta^2} \right|} \quad (27)$$

式中， η 为正弦信号峰-峰值与数字存储示波器量程之比。

7.7.2.2 方法二 (失真度仪直接测量法)

接线如图 10，选定任意波发生器的校准通道及量程，失真度仪与被校任意波发生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\text{max}}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直流偏置为 0，将正弦信号波形 $x(t_i) = C_0 \sin(2\pi f_0 t_i)$ 数据存入波形存储区，并循环输出该波形。其频率 $f_0 = v_{0\text{max}}/N_T$ 。用失真度仪执行测量，获得被测量正弦信号波形总失真度 TD 。



图 10 任意波发生器正弦信号失真特性校准连线框图

7.7.2.3 方法三 (频谱分析法)

接线如图 11，选定任意波发生器的校准通道及量程，频谱分析仪与被校任意波发

JJF 1152—2006



图 11 任意波发生器正弦信号失真特性校准连线框图

生器匹配连接。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\max}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直流偏置为 0，将正弦信号波形 $x(t_i) = C_0 \sin(2\pi f_0 t_i)$ 数据存入波形存储区，并循环输出该波形。其频率 $f_0 = v_{0\max}/N_T$ 。

将频谱分析仪的起始频率调整到信号基波频率点 f_0 上，调整分析带宽使得 f_0 的各次谐波均出现在频谱分析仪的频率刻线点上。

执行测量分析，获得被测量正弦信号波形的基波和各次谐波幅度测量结果： C_1, C_2, \dots, C_m 。（一般，谐波阶次 $m \geq 5$ ）。则正弦信号波形不含噪声的总失真度 TD ：

$$TD = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^m C_i^2}}{C_1} \quad (28)$$

注：可以使用数字存储示波器的频谱分析功能获得各次谐波幅度测量结果，或者用数字存储示波器的波形测量序列经谐波分析方法得到各次谐波幅度测量结果，然后按式 (28) 计算获得总失真度 TD 测量结果。

7.7.3 幅度平坦度

在任意波发生器的输出频率范围内，基本均匀地选取 m 个频率点 f_1, f_2, \dots, f_m ，幅度 C_0 保持不变，执行 7.7.1 操作，获得与其频率对应的 m 个幅度测量值 C_1, C_2, \dots, C_m ，以 C_1 为参考点，则其幅度平坦度 δ_E ：

$$\delta_E = \max \left| 20 \lg \frac{C_i}{C_1} \right| \text{dB} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (29)$$

7.8 正弦波形参数的抖动

7.8.1 方法一（正弦波拟合法）

接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出选定幅度和频率的正弦波形。

选择数字存储示波器的测量通道和量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。设置测量通道为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个信号周期采集 100 个点以上；可按式 (16) 选取采样速率 v_a 。

执行采集，获得波形采集数据 $y_i (i = 1, \dots, n)$ ；输入计算机。

设第 i 个测量点开始的一段（约一个周期）波形曲线模型为 $\hat{y}(k) = C_i \sin(\omega_i k + \theta_i)$

JJF 1152—2006

$+D_i$, ($k=i, i+1, \dots, i+p-1$); 首先, 对第 1 个信号点开始的约一个周期的信号模型的四个参数进行估计, 获得其模型向量($C_1, \omega_1, \theta_1, D_1$); 然后, 以该组估计参数为初始值, 对第 2 个信号点开始的约一个周期的信号的模型参数进行估计, 获得其模型向量($C_2, \omega_2, \theta_2, D_2$); 依次类推, 直至最后一个完整的信号周期, 结束估计。

将模型幅度 C 随时间变化的状况 C_i ($i=1, \dots, n_0$) 以曲线形式表述出来, 获得幅度 C 的抖动曲线和参数;

幅度抖动的实验标准偏差:

$$J_C = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (C_i - \bar{C})^2} \quad (30)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} C_i \quad (31)$$

幅度抖动最大值:

$$\lambda_C = \max |C_i - C_j| \quad i, j = 1, \dots, n_0 \quad (32)$$

将模型频率 f 随时间变化的状况 f_i ($i=1, \dots, n_0$) 以曲线形式表述出来, 获得频率 f 的抖动曲线和参数:

$$f_i = \frac{\omega_i \cdot v_a}{2\pi} \quad i = 1, \dots, n_0 \quad (33)$$

频率抖动的实验标准偏差:

$$J_f = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (f_i - \bar{f})^2} \quad (34)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} f_i \quad (35)$$

频率抖动最大值:

$$\lambda_f = \max |f_i - f_j| \quad i, j = 1, \dots, n_0 \quad (36)$$

将模型直流分量 D 随时间变化的状况 D_i ($i=1, \dots, n_0$) 以曲线形式表述出来, 获得直流分量 D 的抖动曲线和参数;

直流分量抖动的实验标准偏差:

$$J_D = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (D_i - \bar{D})^2} \quad (37)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} D_i \quad (38)$$

直流分量抖动最大值:

$$\lambda_D = \max |D_i - D_j| \quad i, j = 1, \dots, n_0 \quad (39)$$

将模型相位序列 θ_i ($i=1, \dots, n_0$) 等分为两部分, 经过前半部分的均值点和后半

JJF 1152—2006

部分的均值点的直线, 可以认为是其趋势分量 ϕ_i 的表述; 剔除趋势分量后的相位序列值 φ_i 的抖动即是相位 θ_i 的抖动。则,

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_L &= \frac{2}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0/2} \theta_i, & i_L &= \frac{n_0 + 2}{4}; \\ \bar{\theta}_H &= \frac{2}{n_0} \sum_{i=n_0/2+1}^{n_0} \theta_i, & i_H &= \frac{3n_0 + 2}{4}; \\ \phi_i &= \frac{\bar{\theta}_H - \bar{\theta}_L}{i_H - i_L} \cdot (i - i_L) + \bar{\theta}_L\end{aligned}$$

$$\varphi_i = \theta_i - \phi_i \quad i = 1, \dots, n_0 \quad (40)$$

将模型相位 θ_i 剔除趋势分量后的相位值随时间变化的状况 $\varphi_i (i = 1, \dots, n_0)$ 以曲线形式表述出来, 获得相位值 φ_i 的抖动曲线和参数, 作为相位 θ_i 的抖动曲线和参数; 相位 θ_i 抖动的实验标准偏差:

$$J_\theta = \sqrt{\frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (\varphi_i - \bar{\varphi})^2} \quad (41)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \varphi_i \quad (42)$$

相位 θ_i 抖动最大值:

$$\lambda_\theta = \max |\varphi_i - \varphi_j| \quad i, j = 1, \dots, n_0 \quad (43)$$

7.8.2 方法二 (数字存储示波器直接测量法)

使用数字存储示波器的抖动分析功能可以获得信号周期的抖动特性测量结果。若周期抖动的实验标准偏差为 J_T 和周期抖动的最大值为 λ_T 。则,

频率抖动的实验标准偏差 J_f :

$$J_f \approx J_T f^2 = \frac{J_T}{T^2} \quad (44)$$

频率抖动最大值 λ_f :

$$\lambda_f \approx \lambda_T f^2 = \frac{\lambda_T}{T^2} \quad (45)$$

相位 θ_i 抖动的实验标准偏差 J_θ :

$$J_\theta = 2\pi \frac{J_f}{v_a} \quad (46)$$

相位 θ_i 抖动最大值 λ_θ :

$$\lambda_\theta = 2\pi \frac{\lambda_f}{v_a} \quad (47)$$

JJF 1152—2006

注：使用数字存储示波器的测量参数统计分析功能，也可以获得信号参数的抖动特性测量结果，包括幅度、频率、平均值（直流分量）的抖动实验标准偏差和抖动最大值。使用式（46）和（47）可进一步计算获得相位抖动实验标准偏差和相位抖动最大值。

7.8.3 方法三（调制域分析仪直接测量法）

使用调制域分析仪的抖动分析功能可以获得信号周期和频率等参数的抖动特性测量结果，如周期抖动的实验标准偏差 J_T 和周期抖动的最大值 λ_T 。则，按式（44）～式（47）可获得其他抖动参数的测量结果。

7.9 调幅信号特性

7.9.1 方法一（正弦波拟合法）

接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调幅波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；而调制波形为参数可选择的已知波形（一般也选为正弦波形）。

选择数字存储示波器的测量通道和量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50%～90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ （应包含 1 个周期以上调制波形）。设置测量通道为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个载波信号周期采集 4 个点以上。

执行采集，获得波形采集数据 $y_i (i=1, \dots, n)$ ；输入计算机。

设第 i 个测量点为中心的一段波形（约一个周期）曲线模型为 $y(k) = C_i \sin(\omega_i k + \theta_i) + D_i$ ， $(k = i - p, i - p + 1, \dots, i + p)$ ；首先，对第 1 个信号点开始的约一个周期的信号模型的四个参数进行估计，获得其模型向量 $(C_1, \omega_1, \theta_1, D_1)$ ，将它作为该段数据中心点的模型参数；然后，以该组估计参数为初始值，对中心点后面一点为中心的约一个周期的信号的模型参数进行估计，获得其模型向量 $(C_2, \omega_2, \theta_2, D_2)$ ；依次类推，直至最后一个完整的信号周期，结束估计。

将模型幅度 C 随时间变化的状况 $C_i (i=1, \dots, n_0)$ ，以曲线形式 $C(i \cdot \Delta t)$ 表述出来，即为调幅信号的幅度解调波形。

该波形参数即为调制信号参数，可从解调波形中读取。其频率 f_{mod} ，即为调制信号频率；其幅度 $C_{\text{mod}} = (C_{\text{max}} - C_{\text{min}})/2$ ，即为调制信号幅度；其幅度中值点 $C_{\text{med}} = (C_{\text{max}} + C_{\text{min}})/2$ ，即为载波信号幅度；则，调幅度（也称调幅深度或调幅系数） M_C ：

$$M_C = \frac{C_{\text{mod}}}{C_{\text{med}}} = \frac{C_{\text{max}} - C_{\text{min}}}{C_{\text{max}} + C_{\text{min}}} \quad (48)$$

$$C_{\text{max}} = \max\{C_i\}_{i=1, \dots, n_0}; C_{\text{min}} = \min\{C_i\}_{i=1, \dots, n_0}$$

注：若调制信号也为正弦波形，则使用 7.7.1.1 节所述正弦波拟合法获得调制波形参数以及幅度和调幅失真。

7.9.2 方法二（直接测量法）

7.9.2.1 调幅深度



图 12 任意波发生器调制特性校准连线框图

接线如图 12，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调幅波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调幅深度；设置调制度分析仪的检波带宽。用调制度分析仪测量调幅深度。

7.9.2.2 调幅失真

接线如图 13，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接，调制度分析仪的解调输出接至失真度测量仪的输入端。使任意波发生器循环输出标称的调幅波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

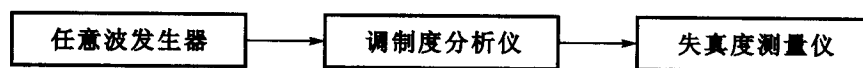


图 13 任意波发生器调制失真特性校准连线框图

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调幅深度；设置调制度分析仪的检波带宽。用失真度测量仪测量调幅失真。

7.10 调频信号特性

7.10.1 方法一（正弦波拟合法）

接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调频波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；而调制波形为参数可选择的已知波形（一般也选为正弦波形）。

选择数字存储示波器的测量通道和量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ （应包含 1 个周期以上调制波形）。设置测量通道为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个载波信号周期采集 4 个点上。

执行采集，获得波形采集数据 $y_i (i=1, \dots, n)$ ；输入计算机。设第 i 个测量点为中心的一段波形（约一个周期）曲线模型为 $\hat{y}(k) = C_i \cos(\omega_i, k + \theta_i) + D_i$ ， $(k = i - p, i - p + 1, \dots, i + p)$ ；首先，对第 1 个信号点开始的约一个周期的信号模型的四个参数进行估计，获得其模型向量 $(C_1, \omega_1, \theta_1, D_1)$ ，将它作为该段数据中心的模型参数；然后，以该组估计参数为初始值，对中心点后面一点为中心的约一个周期的信号的模型参数进行估计，获得其模型向量 $(C_2, \omega_2, \theta_2, D_2)$ ；依次类推，直至最后一

JJF 1152—2006

个完整的信号周期，结束估计。

计算获得信号模型的实时频率序列： $f_i = \omega_i \cdot v_a / (2\pi)$ ， $(i = 1, \dots, n_0)$ ；将模型频率 f 随时间变化的状况 $f_i (i = 1, \dots, n_0)$ 以曲线形式表述出来，即为调频信号的频率解调波形。

该波形参数即为调制信号的参数，可从解调波形中读取。其波形周期对应调制频率 f_{mod} ；若波形幅度最大值为 f_{max} ，最小值为 f_{min} ，则，调频频偏为：

$$\Delta f = \frac{f_{\text{max}} - f_{\text{min}}}{2} \quad (49)$$

载波频率为：

$$f_c = \frac{f_{\text{max}} + f_{\text{min}}}{2} \quad (50)$$

调频指数为：

$$M_f = \frac{\Delta f}{f_{\text{mod}}} \quad (51)$$

注：若调制信号也为正弦波形，则使用 7.7.1.1 节所述正弦波拟合法获得调制波形参数以及调频频偏和调频失真。

7.10.2 方法二（直接测量法）

7.10.2.1 调频频偏

接线如图 12，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调频波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调频频偏；设置调制度分析仪的检波带宽。用调制度分析仪测量调频频偏。

7.10.2.2 调频失真

接线如图 13，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接，调制度分析仪的解调输出接至失真度测量仪的输入端。使任意波发生器循环输出标称的调频波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调频频偏；设置调制度分析仪的检波带宽。用失真度测量仪测量调频失真。

7.11 调相信号特性

7.11.1 方法一（正弦波拟合法）

7.11.1.1 平稳周期性调相信号的测量

接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波

JJF 1152—2006

发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调相波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；而调制波形为参数可选择的周期性已知波形。

选择数字存储示波器的测量通道和量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ （应包含 1 个周期以上调制波形）。设置测量通道为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个载波信号周期采集 4 个点以上。

执行采集，获得波形采集数据 $y_i (i=1, \dots, n)$ ；输入计算机。设第 i 个测量点为中心的一段波形（约一个周期）曲线模型为 $\hat{y}(k) = C_i \cos(\omega_i k + \theta_i) + D_i$ ， $(k = i - p, i - p + 1, \dots, i + p)$ ；首先，对第 1 个信号点开始的约一个周期的信号的模型参数进行估计，估计值作为该信号周期中心点处的参数估计值 $C_1, \omega_1, \theta_1, D_1, \phi(1) = \omega_1$ ；

然后，以该组估计参数为初始值，对该信号中心点后的下一个信号点为中心的约一个周期信号的模型参数进行估计，得参数估计值 $C_2, \omega_2, \theta_2, D_2, \phi(2) = \phi(1) + \omega_2$ ；

依次类推，对第 k 个信号点为中心的约一个周期信号的模型参数进行估计，得参数估计值 $C_k, \omega_k, \theta_k, D_k, \phi(k) = \phi(k-1) + \omega_k$ ；直至最后一个完整的信号周期，结束估计。

对获得的模型参数序列 $\phi(k)$ 进行波形分析，从 $\phi(k)$ 中剔除载波频率造成的线性趋势分量，按中值为 0 或平均值为 0 原则平移解调序列后，获得相位调制信号波形 $\theta(i)$ 。具体做法：

将模型相位序列 $\phi(i) (i=1, \dots, n_0)$ 等分为两部分，经过前半部分的均值点和后半部分的均值点的直线，可以认为是其趋势分量 ϕ_i 的表述，剔除趋势分量后的相位序列值 $\theta(i) (i=1, \dots, n_0)$ ，即是相位调制信号的解调波形。则，

$$\bar{\phi}_L = \frac{2}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0/2} \phi(i), \quad i_L = \frac{n_0 + 2}{4};$$

$$\bar{\phi}_H = \frac{2}{n_0} \sum_{i=n_0/2+1}^{n_0} \phi(i), \quad i_H = \frac{3n_0 + 2}{4};$$

$$\phi_i = \frac{\bar{\phi}_H - \bar{\phi}_L}{i_H - i_L} \cdot (i - i_L) + \bar{\phi}_L, \quad \theta(i) = \phi(i) - \phi_i; \quad (i = 1, \dots, n_0)$$

将模型相位 $\phi(i)$ 剔除趋势分量后的相位值 $\theta(i) (i=1, \dots, n_0)$ 随时间 $t = i \cdot \Delta t$ 变化的状况以曲线形式表述出来，即获得相位调制信号的解调波形。

该波形参数即为调制信号参数，可从解调波形中读取。其波形周期对应调制频率；若波形幅度最大值为 θ_{\max} ，最小值为 θ_{\min} ，则，调相相偏为：

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{2} \quad (52)$$

载波频率为：

$$f_c = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} \quad (53)$$

$$f_{\max} = \max\{f_i\}_{i=1, \dots, n_0}; f_{\min} = \min\{f_i\}_{i=1, \dots, n_0}; f_i = \frac{\omega_i \cdot v_a}{2\pi}, i = 1, \dots, n_0$$

7.11.1.2 特例：正弦波调相信号的测量

当已知调制信号波形为正弦波时，可以执行如下操作获得调相信号波形的解调结果。

接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调相波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；而调制波形为参数可选择的正弦波形。

选择数字存储示波器的测量通道和量程，使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%；调整触发，使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ （应包含 1 个周期以上调制波形）。设置测量通道为实时采样方式，调整采样速率 v_a ，使每个载波信号周期采集 4 个点以上。

执行采集，获得波形采集数据 $y_i (i=1, \dots, n)$ ；输入计算机。设第 i 个测量点为中心的一段（约一个周期）波形曲线模型为 $y(k) = C_i \cos(\omega_i \cdot k + \theta_i) + D_i$ ， $(k = i - p, i - p + 1, \dots, i + p)$ ；首先，对第 1 个信号点开始的约一个周期的信号的模型参数进行估计，估计值作为该信号周期中心点处的参数估计值 C_1 、 ω_1 、 θ_1 、 D_1 ；然后，以该组估计参数为初始值，对该信号中心点后的下一个信号点为中心的约一个周期信号的模型参数进行估计，得参数估计值 C_2 、 ω_2 、 θ_2 、 D_2 ；

依次类推，对第 k 个信号点为中心的约一个周期信号的模型参数进行估计，得参数估计值 C_k 、 ω_k 、 θ_k 、 D_k ；直至最后一个完整的信号周期，结束估计。

获得数字角频率序列 $\omega_k (k=1, 2, \dots, n_0)$ 之后，对该数字角频率序列进行正弦波曲线拟合，获得拟合模型：

$$\hat{\omega}(k) = \omega_{\text{peak}} \cos(\Omega \cdot k + \varphi_f) + \omega_{\text{dc}} \quad (\text{rad./Sample}) \quad (54)$$

其中， ω_{dc} 是拟合正弦曲线的直流分量，为载波频率； Ω 是拟合正弦曲线的数字角频率，为调制信号频率； ω_{peak} 是拟合正弦曲线的峰值幅度，为调制频率偏移。

则可获得相位调制信号波形 $\theta(k)$ ：

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \omega_k - \omega_{\text{dc}} \quad (\text{rad}) \quad k = 2, 3, \dots, n_0 \quad (55)$$

$$\theta(1) = \omega_1 - \omega_{\text{dc}} + \frac{\omega_{\text{peak}}}{\Omega} \sin \varphi_f \quad (\text{rad}) \quad (56)$$

按 7.7.1.1 节所述正弦波拟合方法对调制信号序列 $\theta(k) (k=1, 2, \dots, n_0)$ 进行曲线拟合，可获得其峰值幅度 $\theta_{\text{peak}} = \omega_{\text{peak}} / \Omega$ 弧度，频率 $f_{\theta} = \Omega \cdot v_a / (2\pi)$ 赫兹。则其

JJF 1152—2006

调制信号频率 $f_{\text{mod}} = f_{\theta}$ ，其载波频率为 $f_c = \omega_{\text{dc}} \cdot v_a / (2\pi)$ 赫兹；调相相偏为：

$$\Delta\theta = \theta_{\text{peak}} = \frac{\omega_{\text{peak}}}{\Omega} \quad (57)$$

7.11.2 方法二（直接测量法）：

7.11.2.1 调相相偏

接线如图 12，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的调相波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调相相偏；设置调制度分析仪的检波带宽。用调制度分析仪测量调相相偏。

7.11.2.2 调相失真

接线如图 13，选定任意波发生器的校准通道及量程，调制度分析仪与被校任意波发生器匹配连接，调制度分析仪的解调输出接至失真度测量仪的输入端。使任意波发生器循环输出标称的调相波形，其载波为幅度和频率可以设定的正弦波形；调制波形也为参数可选择的正弦波形。

设置任意波发生器输出信号的载波幅度、频率、调制频率、调相相偏；设置调制度分析仪的检波带宽。用失真度测量仪测量调相失真。

7.12 周期波形总失真度

7.12.1 接线如图 5，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接，数字存储示波器 A/D 位数为 b 。设定任意波发生器的 D/A 取样速率 v 为其标称最高速率 $v_{0\text{max}}$ ，选取每个信号周期数据点数 N_T 和波形存储深度 N_m (N_m 个波形数据中恰好含有整数个信号周期)，令直流偏置为 0，将函数关系已知的周期性任意波形 $x(t)$ 的抽样数据 $x(t_i)$ 存入波形存储区，并循环输出该周期波形；

$$x(t) = \begin{cases} \dots & \dots \\ X_1(t) & 0 \leq t < T_1 \\ X_2(t) & T_1 \leq t < T_1 + T_2 \\ \dots & \dots \\ X_p(t) & T - T_p \leq t < T \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (58)$$

其中，信号 $x(t)$ 的周期为 T ，每个周期由 p 段已知函数关系的曲线 $X_k(t)$ ($k=1, \dots, p$) 组成，各段曲线所占时间分别为 T_k ，它们与周期 T 之比 $\eta_k = T_k/T$ 严格已知，

且 $\sum_{k=1}^p \eta_k = 1$ 。每段长度 T_k 应大于任意波发生器内 D/A 的建立时间 t_s ，一般选取 $T_k > 2t_s$ 。

JJF 1152—2006

7.12.2 选择数字存储示波器的测量通道和量程,使信号峰-峰值为对应通道量程的50%~90%;调整触发,使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。设置测量通道为实时采样方式,调整采样速率 v_a ,使每个信号函数段 $X_k(t)$ ($k=1, \dots, p$) 采集3个点以上,采集5个以上完整周期波形;可按式(16)选取采样速率 v_a 。

对信号 $x(t)$ 的实际输出波形以采样间隔 $\Delta t = 1/v_a$ 实施波形测量,获得测量序列 y_i ($i=1, \dots, n$)。不失一般性,设 n 个测量点恰好含有整数个信号周期(误差极限为 ± 1 个采样间隔)。

7.12.3 使用波形测量法(参见附录C)或其他方法精确测量信号周期 T ,得到每个信号周期的测量点数 $n_T = T/\Delta t$;用傅里叶分解法获得波形序列 y_i 的基波幅度 C_y 和初相位 θ_y :

$$A_y = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \cos \frac{2\pi(i-1)}{n_T} \quad (59)$$

$$B_y = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sin \frac{2\pi(i-1)}{n_T} \quad (60)$$

$$C_y = \sqrt{A_y^2 + B_y^2} \quad (61)$$

$$\theta_y = \begin{cases} \arctan(-B_y/A_y) & A_y > 0 \\ \pi + \arctan(-B_y/A_y) & A_y < 0 \end{cases} \quad (62)$$

7.12.4 按信号周期的测量值 T 、采样间隔 $\Delta t = 1/v_a$ 、各段函数所占据的时间比 η_k 和每周期采样点数 n_T ,确定 $T_k = \eta_k \cdot T$,构造具有已知相位和幅度的标准函数 $x_0(t)$:

$$x_0(t - \tau) = \begin{cases} \dots & \dots \\ X_1(t) & 0 \leq t < T_1 \\ X_2(t) & T_1 \leq t < T_1 + T_2 \\ \dots & \dots \\ X_p(t) & T - T_p \leq t < T \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (63)$$

由式(63)获得标准函数的抽样值 $x_0(i \cdot \Delta t)$ ($i=1, \dots, n$)。 τ 为一个实数,代表与 $t=0$ 时刻相对应的值在曲线函数 $X_k(t)$ 中的位置。

7.12.5 用傅里叶分解法获得波形 $x_0(t)$ 的基波幅度 C_{x_0} 和初相位 θ_{x_0} :

$$A_{x_0} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_0(i \cdot \Delta t) \cdot \cos \frac{2\pi(i-1)}{n_T} \quad (64)$$

$$B_{x_0} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_0(i \cdot \Delta t) \cdot \sin \frac{2\pi(i-1)}{n_T} \quad (65)$$

$$C_{x_0} = \sqrt{A_{x_0}^2 + B_{x_0}^2} \quad (66)$$

JJF 1152—2006

$$\theta_{x0} = \begin{cases} \arctan(-B_{x0}/A_{x0}) & A_{x0} > 0 \\ \pi + \arctan(-B_{x0}/A_{x0}) & A_{x0} < 0 \end{cases} \quad (67)$$

7.12.6 计算标准函数 $x_0(t)$ 与实际波形序列 y_i 基波初相位间的相位差 $\Delta\theta = \theta_{x0} - \theta_y$;

$0 \leq \Delta\theta < 2\pi$; 则, $\tau = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \cdot T$ 。

7.12.7 平移标准函数波形 τ 时间, 得到与测量波形序列 y_i 同相位的函数波形 $x(t) = x_0(t + \tau)$ 。

7.12.8 令与测量波形序列 y_i 最小二乘最优的期望函数为 $y(t) = G \cdot x(t) + D$ 。即, 选取合适的 G 与 D , 使得 ϵ_{rms} 为最小, 即:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y(i \cdot \Delta t))^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - G \cdot x(i \cdot \Delta t) - D)^2} = \min \end{aligned} \quad (68)$$

则,

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n x(i \cdot \Delta t) \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x(i \cdot \Delta t) \cdot y_i}{\left[\sum_{i=1}^n x(i \cdot \Delta t) \right]^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x^2(i \cdot \Delta t)} \quad (69)$$

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \frac{G}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x(i \cdot \Delta t) \quad (70)$$

$$\begin{aligned} y_r &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y(i \cdot \Delta t) - \bar{y})^2} \\ &= G \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x(i \cdot \Delta t) - \bar{x})^2} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y(i \cdot \Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (G \cdot x(i \cdot \Delta t) + D) \quad (72)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i \cdot \Delta t) \quad (73)$$

$$y_{\text{max}} = \max\{y(t)\}; y_{\text{min}} = \min\{y(t)\}; \xi = \frac{2y_r}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}}$$

则周期性任意波形信号 $x(t)$ 的总失真度为:

$$TD = \sqrt{\left| \frac{\epsilon_{\text{rms}}^2}{y_r^2} - \frac{1}{2^{2 \cdot b} 3 \xi^2 \eta^2} \right|} \quad (74)$$

式中, ξ ——周期信号交流有效值和峰值之比;

η ——周期信号峰-峰值与数字存储示波器量程之比。

7.13 周期波形的相关系数

JJF 1152—2006

执行 7.12.1~7.12.4 所述过程,按照下述公式计算设定的任意波形信号 $x(t)$ 和实际任意波形信号 $y(t)$ 的相关函数 $R(\tau)$ 序列:

$$R(k \cdot \Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_T} [x_0(i \cdot \Delta t) - \bar{x}_0](y_{i+k} - \bar{y})}{\sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^{n_T} [x_0(i \cdot \Delta t) - \bar{x}_0]^2 \right\} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k+n_T} (y_i - \bar{y})^2 \right\}}} \quad (75)$$

其中, $\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_0(i \cdot \Delta t)$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, ($k = 0, 1, \dots, n - n_T$)。则,其最大相关系数绝对值为:

$$r_{xy} = \max |R(k \cdot \Delta t)| \quad (k = 0, 1, \dots, n - n_T) \quad (76)$$

7.14 周期波形的谐波波谱

7.14.1 方法一(谐波分析法)

a) 接线如图 5,选定任意波发生器的校准通道及量程,数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的周期波形 $x(t)$ 。

选择数字存储示波器的测量通道和量程,使信号峰-峰值为对应通道量程的 50%~90%;调整触发,使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n_0 \geq 1000$ 。设置测量通道为实时采样方式,调整采样速率 v_a ,使每个载波信号周期采集 3 个点以上;可按式 (16) 选取采样速率 v_a 。

b) 以采样间隔 $\Delta t = 1/v_a$ 对周期信号 $x(t)$ 进行波形采样,获得采样序列 y_i , ($i = 0, 1, \dots, n_0 - 1$)。

c) 在上述样本中,截取含有整数个信号周期的 n 个样本(误差极限为 ± 1) 点 y_m , ($m = 0, 1, \dots, n - 1$)。用式 (77) 计算波形均值 A_0 ;同时获得序列: $y_{0m} = y_m - A_0$, ($m = 0, 1, \dots, n_0 - 1$)。

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} y_m \quad (77)$$

d) 使用周期精确测量方法获得信号周期 T (参见附录 C), 计算:

$$n_T = \frac{T}{\Delta t} \quad (78)$$

e) 通过判定过零点,从序列 y_{0m} 中截取首尾值皆处于零附近,含有整数个信号周期的信号样本点 y_{0i} , ($i = 0, 1, \dots, n - 1$), 按式 (79) ~ (80) 计算获得周期信号 $x(t)$ 的谐波分量参数 A_k 、 B_k ;

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{0i} \cos \frac{2ki\pi}{n_T} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (79)$$

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{0i} \sin \frac{2ki\pi}{n_T} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (80)$$

JJF 1152—2006

f) 通过式 (81)、(82) 获得相应的幅度 C_k 和相位 θ_k :

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (81)$$

$$\theta_k = \begin{cases} \arctan(-B_k/A_k) & A_k > 0 \\ \pi + \arctan(-B_k/A_k) & A_k < 0 \end{cases} \quad (82)$$

用 dBV 量纲表述 C_k 时有:

$$C_{kd} = 20\lg(C_k/1V) \quad (83)$$

g) 谐波分析结束后, 通过选取最高谐波次数 M , 用式 (84)、(85) 对信号 $y(t)$ 进行近似的函数表示:

$$\begin{aligned} y(\Delta t \cdot i) &\approx \hat{y}(i \cdot \Delta t) = A_0 + \sum_{k=1}^M \left[A_k \cos \frac{2ki\pi}{n_T} + B_k \sin \frac{2ki\pi}{n_T} \right] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^M C_k \cos \left[\frac{2ki\pi}{n_T} + \theta_k \right] \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \hat{y}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^M \left[A_k \cos \frac{2k\pi t}{n_T \Delta t} + B_k \sin \frac{2k\pi t}{n_T \Delta t} \right] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^M C_k \cos \left[\frac{2k\pi t}{n_T \cdot \Delta t} + \theta_k \right] \end{aligned} \quad (85)$$

7.14.2 方法二 (频谱分析仪直接测量法)

接线如图 11, 选定任意波发生器的校准通道及量程, 频谱分析仪与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的周期波形 $x(t)$ 。

使用频率计数器直接测量法或其他方法精确测量信号基波频率 f_0 。

将频谱分析仪的起始频率调整到信号基波频率点 f_0 上, 调整分析带宽使得 f_0 的各次谐波均出现在频谱分析仪的频率刻线点上。

执行测量分析, 获得被测量正弦信号波形的基波和各次谐波幅度测量结果: C_1, C_2, \dots, C_m 。

7.15 斜波、三角波波形参数

7.15.1 方法一 (波形测量法)

7.15.1.1 接线如图 5, 选定任意波发生器的校准通道及量程, 数字存储示波器与被校任意波发生器匹配连接。使任意波发生器循环输出标称的周期波形 $x(t)$ (斜波或三角波)。

选择数字存储示波器的测量通道、量程, 使信号峰-峰值为对应通道量程的 50% ~ 90%, 调整触发, 使信号稳定显示。

设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。设置测量通道为实时采样方式, 调整采样速率 v_a , 使每个载波信号周期采集 100 个点以上, $\Delta t = 1/v_a$; 可按式 (16) 选取采样速率 v_a 。

执行采集, 获得采样序列 $y_j (j=0, 1, \dots, n_0-1)$ 。

7.15.1.2 三角波信号沿线线性度 (最小二乘评价方法)

JJF 1152—2006

对测量序列 y_j 进行预处理,使其含有整数 N_c 个三角波周期,并且第 1 个测量点为波形的峰值点或谷值点,将采集序列记为 $y_j (j=1, \dots, n)$ 。设对应于 y_j 的采样时刻为 $t_j = (j-1) \cdot \Delta t$ 。

从采集序列中截取一段“波峰”与相邻的“波谷”之间的测量序列 $y_{0i} (i=1, \dots, m)$,与之对应的采集时刻为 $t_{0i} = (i-1) \cdot \Delta t + K \cdot \Delta t, (i=1, \dots, m)$, K 表示截取的序列是从 $j=K$ 点开始,即 $y_{0i} = y_{K+i-1}$ 。则,该段测量序列是三角波符合线性规律的曲线沿,将其模型规律记为:

$$y = G \cdot t + D \quad (86)$$

则,根据 $t_{0m} - t_{01} = (m-1) \cdot \Delta t$, 可得 G 与 D 的最小二乘估计值为:

$$\begin{aligned} G &= \frac{m \sum_{i=1}^m y_{0i} t_{0i} - \sum_{i=1}^m y_{0i} \cdot \sum_{i=1}^m t_{0i}}{m \sum_{i=1}^m t_{0i}^2 - \left(\sum_{i=1}^m t_{0i} \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m y_{0i} (K+i-1) - \frac{2K+m-1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i}}{m \cdot (m-1)(m+1)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i} - \frac{G}{m} \cdot \sum_{i=1}^m t_{0i} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i} - G \cdot \Delta t \left(K + \frac{m-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (88)$$

线性度:

$$L_{\max} = \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot t_{0i} - D|}{G \cdot \eta \cdot T} \right\}_{i=1, \dots, m} \quad (89)$$

其中, η 为三角波的对应沿在整周期中所占时间的百分比,对于上升沿有 $\eta = S$, 对于下降沿有 $\eta = 1 - S$, T 为其周期, S 为波形对称度。

$$\begin{aligned} L_{\max} &\approx \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot t_{0i} - D|}{G \cdot (t_{0m} - t_{01})} \right\}_{i=1, \dots, m} \\ &= \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot t_{0i} - D|}{G \cdot (m-1) \Delta t} \right\}_{i=1, \dots, m} \end{aligned} \quad (90)$$

7.15.1.3 三角波幅度参数 (最小二乘评价方法)

选取 3 段依次顺序排列的三角波边沿,按照上述方法分别进行最小二乘直线拟合,获得 3 个直线方程:

$$y = G_1 \cdot t + D_1 \quad (91)$$

$$y = G_2 \cdot t + D_2 \quad (92)$$

$$y = G_3 \cdot t + D_3 \quad (93)$$

JJF 1152—2006

设 $G_1 > 0$ ，描述三角波上升沿，则 $G_3 > 0$ 也对应上升沿，而 $G_2 < 0$ 对应三角波的下沿。方程 (91) 和方程 (92) 交点的纵坐标为三角波的峰值 y_{T1} ：

$$y_{T1} = \frac{G_2 D_1 - G_1 D_2}{G_2 - G_1} \quad (94)$$

方程 (92) 和方程 (93) 交点的纵坐标为三角波的谷值 y_{B1} ：

$$y_{B1} = \frac{G_3 D_2 - G_2 D_3}{G_3 - G_2} \quad (95)$$

三角波中值 y_{M1} ：

$$y_{M1} = \frac{y_{T1} + y_{B1}}{2} \quad (96)$$

三角波幅度值 y_{A1} ：

$$y_{A1} = \frac{y_{T1} - y_{B1}}{2} \quad (97)$$

三角波的对称度可以用上升沿在整个信号周期中所占时间的百分比 S 来表示，则：

$$S = \frac{G_1^{-1}}{G_1^{-1} - G_2^{-1}} \quad (98)$$

注：可以使用数字存储示波器的幅度测量功能直接获得三角波信号的幅度、峰值、谷值、中值、对称度等幅度参数的测量结果。

7.15.1.4 三角波信号频率（最小二乘评价方法）

设三角波信号频率 f ，周期 $T = 1/f$ ；由上述过程获得的 N_c 个整数周期三角波形序列中，第 1 个上升沿的模型方程为： $y = G_1 \cdot t + D_1$ ，它与时间轴 t 的交点为 $t_{c1} = -D_1/G_1$ ；第 N_c 个上升沿的模型方程为： $y = G_N \cdot t + D_N$ ，它与时间轴 t 的交点为： $t_{cN} = -D_N/G_N$ ；则有，

$$T = \frac{1}{N_c - 1} \cdot \left(\frac{D_1}{G_1} - \frac{D_N}{G_N} \right) \quad (99)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (100)$$

注：可以使用数字存储示波器的频率测量功能直接获得三角波信号频率测量结果。

7.15.2 方法二（直接参数测量法）

接线如图 3 所示，任意波发生器输出的三角波有效值幅度可以由交流数字电压表（或功率计）直接测量获得，进而由其波峰因数转换成峰值幅度。

接线如图 4 所示，任意波发生器输出的三角波频率可以由时间频率计数器直接测量获得。

7.16 静态特性（增益、线性度、直流偏移、随机噪声、微分非线性、积分非线性）

7.16.1 接线如图 3，选定任意波发生器的校准通道及量程，数字电压表与被校任意波发生器匹配连接。任意波发生器的 D/A 位数为 b ，则，其量化阶梯码数为 $m = 2^b$ ，设定波

JJF 1152—2006

形存储深度, 令直流偏置为 0, 通过将量化阶梯码值 k 写入 D/A 波形存储区, 使任意波发生器分别输出各量化阶梯码值 k 对应的输出值 x_k ($k=0, 1, \dots, m-1$), 用数字电压表读取相应的测量值 y_{ki} ($k=0, 1, \dots, m-1, i=0, 1, \dots, n-1$)。则,

第 k 个量化阶梯码值 x_k 处的静态随机噪声标准差 s_k 为:

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{ki} - y_k)^2} \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \quad (101)$$

第 k 个量化阶梯码值 x_k 的测量结果 y_k 为:

$$y_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{ki} \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \quad (102)$$

本量程标称最高幅度直流信号 $x_{\max} = x_{m-1}$ 和标称最低幅度直流信号 $x_{\min} = x_0$, 其相应的最高幅度测量值 $y_{\max} = y_{m-1}$ 和最低幅度测量值 $y_{\min} = y_0$ 。D/A 量化阶梯码宽度 w_k 为:

$$w_k = y_{k+1} - y_k \quad (k=0, 1, \dots, m-2) \quad (103)$$

任意波发生器的理想量化阶梯 Q 为:

$$Q = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^b - 1} \quad (104)$$

$$x_k = x_{\min} + k \cdot Q \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \quad (105)$$

7.16.2 方法 1 (端基直线法)

直流增益:

$$G = \frac{y_{m-1} - y_0}{x_{m-1} - x_0} \quad (106)$$

直流偏移:

$$D = y_0 - G \cdot x_0 \quad (107)$$

任意波发生器的平均量化阶梯 Q' 为:

$$Q' = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2^b - 1} \quad (108)$$

第 k 个量化码的微分非线性误差:

$$DNL(k) = \frac{w_k - Q'}{Q'} \quad (k=0, 1, \dots, m-2) \quad (109)$$

微分非线性:

$$DNL = \max \left| \frac{w_k - Q'}{Q'} \right| \quad (k=0, 1, \dots, m-2) \quad (110)$$

第 k 个量化码的积分非线性误差:

$$INL(k) = \frac{y_k - y_{\min} - k \cdot Q'}{y_{\max} - y_{\min}} \quad (k=1, \dots, m-1) \quad (111)$$

积分非线性:

JJF 1152—2006

$$INL = \max \left| \frac{y_k - y_{\min} - k \cdot Q'}{y_{\max} - y_{\min}} \right| \quad (k = 1, \dots, m-1) \quad (112)$$

第 k 个量化码的静态误差:

$$SE(k) = \frac{y_k - x_{\min} - k \cdot Q}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (k = 1, \dots, m-1) \quad (113)$$

最大静态误差:

$$MSE = \max \left| \frac{y_k - x_{\min} - k \cdot Q}{x_{\max} - x_{\min}} \right| \quad (k = 1, \dots, m-1) \quad (114)$$

7.16.3 方法 2 (最小二乘法)

直流增益:

$$G = \frac{m \sum_{k=0}^{m-1} y_k x_k - \sum_{k=0}^{m-1} y_k \sum_{k=0}^{m-1} x_k}{m \sum_{k=0}^{m-1} x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right)^2} \quad (115)$$

直流偏移:

$$D = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} y_k \sum_{k=0}^{m-1} x_k^2 - \sum_{k=0}^{m-1} y_k x_k \cdot \sum_{k=0}^{m-1} x_k}{m \sum_{k=0}^{m-1} x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right)^2} \quad (116)$$

任意波发生器的平均量化阶梯 Q' 为:

$$Q' = G \cdot Q \quad (117)$$

按照式 (109) ~ (114) 计算有关静态特性参数。

7.17 输出电阻

接线如图 5, 选定任意波发生器的校准通道、量程和标称输出 E_i , 调整匹配器电阻使得它与数字示波器内阻共同作用产生的电阻值 R 分别为 R_1 和 R_2 , 用数字示波器分别读取 R_1 和 R_2 两种情况下的电压测量值 U_1 和 U_2 。

则, 任意波发生器的输出电阻 R_i 为:

$$R_i = \frac{(R_2 - R_1) U_2 R_1}{U_1 R_2 - U_2 R_1} - R_1 \quad (118)$$

8 校准结果表达

校准结果应在校准证书或校准报告上反映。校准证书或报告应至少包括如下信息:

- 标题, 如“校准证书”或“校准报告”;
- 实验室名称和地址;
- 如果不在实验室内进行校准时, 需说明进行校准的地点;
- 证书或报告的惟一性标识 (如编号), 每页及总页数的标识;

JJF 1152—2006

- e) 送校单位的名称和地址;
 - f) 被校对象的描述和明确标识;
 - g) 进行校准的日期, 如果与校准结果的有效性及应用有关时, 应说明被校对象的接收日期;
 - h) 如果与校准结果的有效性及应用有关时, 应对抽样程序进行说明;
 - i) 对校准所依据的技术规范的标识, 包括名称及代号;
 - j) 本次校准所用测量标准的溯源性及有效性说明;
 - k) 校准环境的描述;
 - l) 校准结果及其测量不确定度的说明;
 - m) 校准证书及校准报告签发人的签名、职务或等效标识, 以及签发日期;
 - n) 校准结果仅对被校对象有效的声明;
 - o) 未经实验室书面批准, 不得部分复制证书或报告的声明。
- 经校准的任意波发生器, 发给校准证书或校准报告, 加盖校准印章。

9 复校时间间隔

校准时间间隔由用户根据需要自定。确定原则是相邻两次校准时间间隔内, 被校准仪器的计量性能变化在实际需求允许的范围内。

JJF 1152—2006

附录 A

任意波发生器校准结果记录格式

仪器名称：_____ 温度：_____ 湿度：_____ 日期：_____

量程及分辨力

通道	标称最低输出	标称最高输出	标称分辨力	最低输出值	最高输出值	幅度分辨力
	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)

D/A 取样速率

通道	幅度	标称取样速率	每个周期数据点数	取样速率	取样速率相对误差
	(V)	(Sa/s)	(1)	(Sa/s)	(1)

频率范围及分辨力

通道	幅度	标称最低频率	标称最高频率	标称分辨力	最低频率	最高频率	频率分辨力
	(V)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)

频率稳定度、漂移

通道	幅度	标称频率	实测频率	频率相对误差	时间	频率稳定度	频率漂移
	(V)	(Hz)	(Hz)	(1)	(s)	(1)	(1)

瞬态特性

通道	幅度	取样速率	上升时间	过冲	顶部不平度	压摆率	建立时间
	(V)	(Sa/s)	(s)	(1)	(1)	(V/s)	(s)

方波特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	占空比
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(1)

JJF 1152—2006

通道间延迟时间差

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	参比通道	延迟时间差
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(1)	(s)

通道间相位差

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	参比通道	标称相位差	相位差
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(1)	(°)	(°)

正弦波特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	直流偏移	总失真度
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(V)	(1)

幅度平坦度 (频率特性)

通道	取样速率	参考幅度	参考频率	超始频率	终止频率	平坦度
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(dB)

正弦波幅度抖动特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	抖动标准差	抖动极值
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(V)	(V)

正弦波频率抖动特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	抖动标准差	抖动极值
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(Hz)	(Hz)

正弦波相位抖动特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	抖动标准差	抖动极值
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(°)	(°)

JJF 1152—2006

正弦波直流分量抖动特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	抖动标准差	抖动极值
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(V)	(V)

正弦载波调幅特性

通道	载波幅度	载波频率	标称调幅度	调制频率	解调幅度	解调频率	调幅度
	(V)	(Hz)	(%)	(Hz)	(V)	(Hz)	(%)

正弦载波调频特性

通道	载波幅度	载波频率	标称频偏	调制频率	解调频偏	解调频率	调频指数
	(V)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(1)

正弦载波调相特性

通道	载波幅度	载波频率	标称相偏	调制频率	解调相偏	解调频率
	(V)	(Hz)	(°)	(Hz)	(°)	(Hz)

周期性任意波形失真特性

通道	波形	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	总失真度
		(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(1)

周期性任意波形相关特性

通道	波形	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	相关系数
		(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(1)

周期性任意波形谐波特性

通道	波形	取样速率	标称幅度	标称频率	实测频率	直流幅度	基波幅度	2次谐波	3次谐波
		(Sa/s)	(V)	(Hz)	(Hz)	(V)	(V)	(V)	(V)

JJF 1152—2006

斜波、三角波特性

通道	取样速率	标称幅度	标称频率	实测幅度	实测频率	中值	线性度	对称度
	(Sa/s)	(V)	(Hz)	(V)	(Hz)	(V)	(1)	(1)

静态特性

通道	量程	直流增益	直流偏移	微分非线性	积分非线性	静态误差	量化阶梯
	(V)	(1)	(V)	(1)	(1)	(V)	(V)

输出电阻

通道	量程	幅度	标准电阻 R_1	标准电阻 R_2	输出电阻 R_i
	(V)	(V)	(Ω)	(M Ω)	(Ω)
			50	1	

附录 B

正弦波形序列的最小二乘拟合算法

理想正弦信号可用下述四参数表达式表示：

$$y(t) = A\cos(\bar{\omega} \cdot t) + B\sin(\bar{\omega} \cdot t) + D$$

或

$$y(t) = C\cos(\bar{\omega} \cdot t + \theta) + D$$

以时间间隔 Δt 进行离散化抽样后，在采样点上获得的离散序列可相应表述为：

$$y(\Delta t \cdot i) = A\cos(\omega \cdot i) + B\sin(\omega \cdot i) + D$$

或

$$y(\Delta t \cdot i) = C\cos(\omega \cdot i + \theta) + D$$

其中， $\omega = \bar{\omega} \cdot \Delta t$

用指定参数的正弦波信号作为波形测量仪器的输入，得到一组数据记录。通过改变拟合正弦波形的相位、幅度、直流偏移和频率，使拟合结果和数据记录序列各点的残差平方和最小，即是正弦波形序列最小二乘拟合算法的基本思想。这里提供正弦波形的两种拟合方法：一种用于采样频率和被测信号频率均已知时；另一种用于被测信号频率未知时。每一个途径包括两种基本算法：一种通过矩阵运算，另一种通过叠代过程。对于已知信号频率的情况，当初始条件相同时，上述两个算法结果一致。但两者的收敛性不一样，使用矩阵算法比不使用矩阵算法的收敛速度要快，特别是信号周期数小于 5 个时。

需要说明的是，下列 B1 节中所述的三参数算法（对已知频率）是一种闭合算法，因此总能获得一个结果。但是，如果算法中使用的频率（假设已知）和实际输入的频率不一样，或采集速率有较大误差，三参数算法的结果比稍后所述的四参数算法结果要差。但第 B2.1 和 B2.2 节中的四参数算法在初始条件偏离较多，或有一些特别不正确的数据下，叠代过程可能发散。B2.3 节中的四参数算法在所述的收敛区间内是绝对收敛的。

B1 正弦波形序列三参数（已知频率）最小二乘拟合算法

B1.1 正弦波形序列三参数最小二乘拟合——矩阵算法

设理想正弦信号为：

$$y(t) = A\cos(\bar{\omega} \cdot t) + B\sin(\bar{\omega} \cdot t) + D$$

数据记录序列为时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的采集样本 y_1, y_2, \dots, y_n ，拟合过程即为选取或寻找 A, B, D ，使下式所述残差平方和最小：

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n [y_i - A\cos(\bar{\omega} \cdot t_i) - B\sin(\bar{\omega} \cdot t_i) - D]^2 \quad (\text{B1})$$

这里， $\bar{\omega}$ 是输入正弦信号的角频率（假设已知）。

为了找出合适的 A, B 和 D 值，首先构造下列矩阵：

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\omega} \cdot t_1) & \sin(\bar{\omega} \cdot t_1) & 1 \\ \cos(\bar{\omega} \cdot t_2) & \sin(\bar{\omega} \cdot t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\bar{\omega} \cdot t_n) & \sin(\bar{\omega} \cdot t_n) & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

式 (B1) 可用矩阵方式表示如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \Psi\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \Psi\mathbf{x}) \quad (\text{B2})$$

这里 $(*)^T$ 表示 $(*)$ 的转置

可以得出式 (B2) 最小时的最小二乘解 \hat{x} :

$$\hat{x} = (\Psi^T \Psi)^{-1}(\Psi^T \mathbf{y})$$

拟合函数为:

$$\hat{x}_i = A \cos(\bar{\omega} \cdot t_i) + B \sin(\bar{\omega} \cdot t_i) + D$$

将其转换为幅度和相位表达形式:

$$\hat{y}_i = C \cos(\bar{\omega} \cdot t_i + \theta) + D$$

其中:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left[\frac{-B}{A}\right], & A \geq 0 \\ \arctan\left[\frac{-B}{A}\right] + \pi, & A < 0 \end{cases}$$

拟合残差 r_i 如下:

$$r_i = y_i - A \cos(\bar{\omega} \cdot t_i) - B \sin(\bar{\omega} \cdot t_i) - D$$

拟合残差有效值如下:

$$\rho = \varepsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2}$$

B1.2 正弦波形序列三参数最小二乘拟合——代数方程算法

设数据记录序列为包含了一系列在时刻 $t_i (i=1, \dots, n)$ 上采集的正弦信号样本 y_i , 信号的角频率为 $\bar{\omega}$, 定义:

$$\alpha_i = \cos(\bar{\omega} \cdot t_i); \beta_i = \sin(\bar{\omega} \cdot t_i)$$

然后计算下面的九个和:

$$\sum_{i=1}^n y_i; \sum_{i=1}^n \alpha_i; \sum_{i=1}^n \beta_i; \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i; \sum_{i=1}^n \alpha_i^2; \sum_{i=1}^n \beta_i^2; \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i; \sum_{i=1}^n y_i \beta_i; \sum_{i=1}^n y_i^2$$

使用这些和, 计算:

$$A = \frac{A_N}{A_D}; B = \frac{B_N}{B_D}; D = \bar{y} - A \cdot \bar{\alpha} - B \cdot \bar{\beta}$$

其中:

$$A_N = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \alpha_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \alpha_i} - \frac{\sum_{i=1}^n y_i \beta_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \beta_i};$$

JJF 1152—2006

$$A_D = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \alpha_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \beta_i}$$

$$B_N = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \alpha_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i} - \frac{\sum_{i=1}^n y_i \beta_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \beta_i};$$

$$B_D = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \bar{\beta} \sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i - \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \beta_i}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i; \quad \bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$$

拟合函数如下:

$$\hat{y}_i = A \cos(\bar{\omega} \cdot t_i) + B \sin(\bar{\omega} \cdot t_i) + D$$

其幅度和相位表达形式:

$$\hat{y}_i = C \cos(\bar{\omega} \cdot t_i + \theta) + D$$

其中:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left[\frac{-B}{A}\right], & A \geq 0 \\ \arctan\left[\frac{-B}{A}\right] + \pi, & A < 0 \end{cases}$$

拟合残差有效值为:

$$\rho = \epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{n}}$$

其中:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^n y_i^2 + A^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + B^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + nD^2 - 2A \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i - 2B \sum_{i=1}^n \beta_i y_i - 2D \sum_{i=1}^n y_i \\ &\quad + 2AB \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + 2AD \sum_{i=1}^n \alpha_i + 2BD \sum_{i=1}^n \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - A\alpha_i - B\beta_i - D)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \end{aligned}$$

由于这是一种闭合算法,因而收敛是肯定的。

B2 正弦波形序列四参数最小二乘拟合算法

B2.1 正弦波形序列四参数最小二乘拟合——矩阵叠代算法

设正弦数据记录序列中时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的采集样本 y_1, y_2, \dots, y_n , 可使用叠代过程寻找到 A_k, B_k, D_k 和 $\bar{\omega}_k$ 值, 使得下式所述残差平方和最小:

JJF 1152—2006

$$\epsilon_k = \sum_{i=1}^n [y_i - A_k \cos(\bar{\omega}_k t_i) - B_k \sin(\bar{\omega}_k t_i) - D_k]^2 \quad (\text{B3})$$

这里 $\bar{\omega}_k$ 为输入正弦信号的角频率。

其操作步骤如下：

a) 设置循环指针 $k=0$ ，对输入正弦信号的角频率 $\bar{\omega}$ 作一个初始估计。可以用离散傅里叶变换(DFT)来计算频率；或者通过计数波形过零点个数计算频率；或简单地输入一个测量频率初始值。使用 B1 节中给定的三参数矩阵算法进行拟合以确定 A 、 B 和 D ；

b) 设置 $k=k+1$ ，作下一次叠代；

c) 使用下式获得新的角频率：

$$\bar{\omega}_k = \bar{\omega}_{k-1} + \Delta\bar{\omega}_{k-1} \quad (\text{当 } k=1 \text{ 时, } \Delta\bar{\omega}_{k-1} = 0)$$

d) 构造如下矩阵：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix};$$

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\omega}_k t_1) & \sin(\bar{\omega}_k t_1) & 1 & -A_{i-1} t_1 \sin(\bar{\omega}_k t_1) + B_{i-1} t_1 \cos(\bar{\omega}_k t_1) \\ \cos(\bar{\omega}_k t_2) & \sin(\bar{\omega}_k t_2) & 1 & -A_{i-1} t_2 \sin(\bar{\omega}_k t_2) + B_{i-1} t_2 \cos(\bar{\omega}_k t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\bar{\omega}_k t_n) & \sin(\bar{\omega}_k t_n) & 1 & -A_{i-1} t_n \sin(\bar{\omega}_k t_n) + B_{i-1} t_n \cos(\bar{\omega}_k t_n) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \\ D_k \\ \Delta\bar{\omega}_k \end{bmatrix}$$

e) 使式(B3)达到最小的最小二乘解用矩阵形式表示如下：

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\Psi_k^T \Psi_k)^{-1} (\Psi_k^T \mathbf{y})$$

f) 按下式计算幅度 C_k 和相位 θ_k ：

$$\hat{y}_i = C_k \cos(\bar{\omega}_k \cdot t_i + \theta_k) + D_k$$

其中：

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\theta_k = \begin{cases} \arctan\left[\frac{-B_k}{A_k}\right], & A_k \geq 0 \\ \arctan\left[\frac{-B_k}{A_k}\right] + \pi, & A_k < 0 \end{cases}$$

g) 重复步骤 b)~f)，直到 A_k 、 B_k 、 $\bar{\omega}_k$ 和 D_k (或 C_k 、 $\bar{\omega}_k$ 、 θ_k 和 D_k) 的变化小到满足要求。

拟合残差如下：

JJF 1152—2006

$$r_i = y_i - A_k \cos(\omega_k t_i) - B_k \sin(\omega_k t_i) - D_k$$

拟合残差的有效值如下:

$$\rho = \epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2}$$

B2.2 正弦波形序列四参数最小二乘拟合——非矩阵叠代算法

对采集记录的数据序列估计一个角频率初始值 $\bar{\omega}$ 和相位初始值 θ , 这里的相位指的是记录中的第一个点对应的相位。角频率用每秒的弧度数来表示, 可以用离散傅里叶变换(DFT)或计算序列过零次数得到, 也可以直接使用输入信号频率算得。

相位用弧度来表示, 可以按 B1 节中所述三参数法计算得到。或者用下面的公式计算得到:

$$\theta = [\text{sgn}(y_2 - y_1)] \arccos\left(\frac{y_1 - D}{C}\right)$$

其中:

$$\text{sgn}(y_2 - y_1) = \begin{cases} 1 & y_2 > y_1 \\ 0 & y_2 = y_1 \\ -1 & y_2 < y_1 \end{cases}$$

y_1 是为对应于 $t=0$ 的第一个样本点, y_2 是紧跟着 y_1 的下一个样本点, D 、 C 分别是正弦波的直流偏移和幅度。

使用上式计算时, 估计波形幅度可以参照如下方法:

①如果波形数据序列的噪声不大, 用记录数据中的最大值和最小值的代数差的一半作为波形幅度。

②用众数法找最大和最小值, 计算波形幅度。

估计偏移的方法:

①可以使用记录中的最大值和最小值之和的一半。

②取整数个周期内数据的平均值。注意, 如果在每个周期中点数太少, 符号函数 $\text{sgn}(y_2 - y_1)$ 可能给出不正确的结果。特别是在 $\arccos(*)$ 值接近 0 或 π 时。

设数据记录序列中包含了一系列时刻 t_i 的取样 y_i , 用以估计 $\bar{\omega}$ 和 θ , 计算下面的 16 个和:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i; \quad \sum_{i=1}^n y_i; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i y_i; \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^2; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2; \quad \sum_{i=1}^n y_i^2; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i t_i y_i; \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i t_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^2 t_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^2 t_i^2; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i t_i; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i; \quad \sum_{i=1}^n \beta_i t_i^2 \end{aligned}$$

其中:

$$\alpha_i = \cos(\bar{\omega} \cdot t_i + \theta); \quad \beta_i = \sin(\bar{\omega} \cdot t_i + \theta)$$

现在使用 $\bar{\omega}$ 和 θ 的估计值, 计算:

$$\Psi = \bar{\omega} + \frac{a_{22}R - a_{12}S}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\phi = \theta + \frac{a_{11}S - a_{21}R}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

其中:

$$a_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i t_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \beta_i t_i^2 (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i t_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \beta_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{21} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \beta_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{22} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \beta_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i t_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i - \bar{y})} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha})};$$

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i - \bar{y})} - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha})};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i; \quad \bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$$

使用 Ψ 和 ϕ 作为新的 ω 和 θ 估计值, 重复上述过程, 直到两者的差别小到满足要求, 产生其拟合函数的形式如下:

$$\hat{y}_i = C \cos(\Psi \cdot t_i + \phi) + D$$

可按下列式子计算:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (y_i - \bar{y})(\alpha_i + \beta_i + \beta_i t_i)}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_i + \beta_i + \beta_i t_i)}$$

$$D = \bar{y} - C \bar{\alpha}$$

残差有效值为 $\rho = \sqrt{\frac{\epsilon}{n}}$

这里,

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{C^2}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - 2 \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i + D^2 - 2D\bar{y} + 2CD\bar{\alpha} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - C\alpha_i - D)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2\end{aligned}$$

由于这是一个叠代过程，所以对一些误差很大的估计初始值 $\bar{\omega}$ 和 θ 有可能引起发散。

B2.3 正弦波形序列四参数最小二乘曲线拟合算法——三参数迭代算法

三参数正弦曲线拟合是一种闭合的线性过程，绝对收敛。四参数正弦曲线拟合则不然，尚无确切的数学公式可直接计算获得其拟合参数，目前所有已知的方法都属非线性迭代拟合过程，若拟合初始值距离目标值“太远”，则很容易导致迭代过程发散或收敛到局部最优点而不是总体最优点上，致使拟合结果错误。而拟合初始值是否与目标值足够“接近”，尚缺乏实际判据，很难对其进行量化控制，只能在拟合不收敛时，重新选取初始值或重新获取测量数据。而下面介绍的过程则有绝对收敛的特点。

设待估计的正弦波形序列 $y_i (i=1, \dots, n)$ 的模型为：

$$y(t_i) = C \cos(\bar{\omega} \cdot t_i + \theta) + D$$

假设待估计的正弦波角频率目标值为 $\bar{\omega}_0$ ，待估计的正弦波采样序列所含信号周期个数为 p ；则，若 $\Delta\bar{\omega}_{\max} = \bar{\omega}_0/p$ ，在区间 $[\bar{\omega}_0 - \Delta\bar{\omega}_{\max}, \bar{\omega}_0 + \Delta\bar{\omega}_{\max}]$ 内的任意角频率 $\bar{\omega}$ 下，残差平方和 $\varepsilon(\bar{\omega})$ 的极值都存在且惟一。这样，便将四参数正弦波曲线拟合中，对幅度、频率、相位、直流分量四个参数的四维非线性搜索，变成了对频率分量 $\bar{\omega}$ 造成的 $\varepsilon(\bar{\omega})$ 的一维线性搜索，可保证在区间 $[\bar{\omega}_0 - \Delta\bar{\omega}_{\max}, \bar{\omega}_0 + \Delta\bar{\omega}_{\max}]$ 内，用三参数拟合法实现的四参数正弦曲线拟合过程绝对收敛。该四参数拟合过程如下：

(1) 设定拟合迭代停止条件为 h_e ；

(2) 对已知时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的正弦波采集样本 y_1, y_2, \dots, y_n 。使用周期计点法或其他方法获得每个信号周期内所含信号采样点数 m ，并获得序列所含信号周期个数 $p = n/m$ ；则频率 $\bar{\omega}_0$ 的估计值 $\bar{\omega}_0 = 2\pi\nu/m$ ；其收敛区间界为： $\Delta\bar{\omega}_{\max} = \bar{\omega}_0/p = 2\pi\nu/n$ ； $\nu = (n-1)/(t_n - t_1)$ ；

(3) 确定拟合频率 $\bar{\omega}$ 的收敛区间 $[\bar{\omega}_0 - \Delta\bar{\omega}_{\max}, \bar{\omega}_0 + \Delta\bar{\omega}_{\max}] = [\bar{\omega}_0 - 2\pi\nu/n, \bar{\omega}_0 + 2\pi\nu/n]$ ，则，迭代左边界频率： $\bar{\omega}_L = \bar{\omega}_0 - 2\pi\nu/n$ ；迭代右边界频率： $\bar{\omega}_R = \bar{\omega}_0 + 2\pi\nu/n$ ；中值频率： $\bar{\omega}_M = \bar{\omega}_L + 0.618 \times (\bar{\omega}_R - \bar{\omega}_L)$ ； $\bar{\omega}_T = \bar{\omega}_R - 0.618 \times (\bar{\omega}_R - \bar{\omega}_L)$ ；

(4) 在 $\bar{\omega}_L$ 上执行三参数正弦曲线拟合，获得 $C_L, \theta_L, D_L, \rho_L$ ；在 $\bar{\omega}_R$ 上执行三参数正弦曲线拟合，获得 $C_R, \theta_R, D_R, \rho_R$ ；在 $\bar{\omega}_M$ 上执行三参数正弦曲线拟合，获得 $C_M, \theta_M, D_M, \rho_M$ ；在 $\bar{\omega}_T$ 上执行三参数正弦曲线拟合，获得 $C_T, \theta_T, D_T, \rho_T$ ；

(5) 若 $\rho_M < \rho_T$ ，则 $\rho = \rho_M$ ，有 $\bar{\omega}_0 \in [\bar{\omega}_T, \bar{\omega}_R]$ ， $\bar{\omega}_L = \bar{\omega}_T$ ， $\bar{\omega}_T = \bar{\omega}_M$ ； $\bar{\omega}_M = \bar{\omega}_L + 0.618 \times (\bar{\omega}_R - \bar{\omega}_L)$ ；

若 $\rho_M > \rho_T$ ，则 $\rho = \rho_T$ ，有 $\bar{\omega}_0 \in [\bar{\omega}_L, \bar{\omega}_M]$ ， $\bar{\omega}_R = \bar{\omega}_M$ ， $\bar{\omega}_M = \bar{\omega}_T$ ； $\bar{\omega}_T = \bar{\omega}_R - 0.618 \times (\bar{\omega}_R - \bar{\omega}_L)$ ；

(6) 若 $|(\rho_M(k) - \rho_T(k)) / \rho_T(k)| < h_e$ ，则停止迭代，并且，

JJF 1152—2006

$\rho = \rho_T$ 时, 获得四参数拟合正弦曲线参数为 $C = C_T$ 、 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_T$ 、 $\theta = \theta_T$ 、 $D = D_T$ 、 ρ , 拟合结束;

$\rho = \rho_M$ 时, 获得四参数拟合正弦曲线参数为 $C = C_M$ 、 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_M$ 、 $\theta = \theta_M$ 、 $D = D_M$ 、 ρ , 拟合结束;

否则, 重复 (4)~(6) 的过程。

附录 C

信号周期精确测量算法

C1 信号周期的测量原理和方法

信号周期最简单的数字化测量方法应该是周期计数法，但它有不可避免的抽样量化误差，将对测量结果造成无法轻易克服的影响。减弱量化影响的最好方式是使用模型化测量方法。

根据信号分析理论，任何实际存在的周期信号 $x(t)$ 都可以表示成基波与谐波合成的形式：

$$x(t) = \sum_{k=1}^M [C_k \sin(k\bar{\omega}_0 t + \varphi_k)] + D_0 \quad (\text{C1})$$

其中， $\bar{\omega}_0$ 为基波角频率；基波周期为 $T_0 = 2\pi/\bar{\omega}_0$ ，也是信号周期； D_0 为信号直流分量。

首先，对周期信号 $x(t)$ 进行波形采集，获得采集序列 $x_i (i=1, \dots, n)$ ，然后，使用周期计数方法对其周期进行预估计，以预估计的周期值为初始条件对采集序列 x_i 进行数字滤波，滤除基波以外的全部谐波，得基波序列 x_{1i} ；截去基波序列 x_{1i} 两侧因滤波边缘效应影响较大的数据后，使用正弦波拟合法对该基波序列 x_{1i} 进行最小二乘曲线拟合，获得其频率 f_0 和周期 $T_0 = 1/f_0$ 参数估计值，则 T_0 即是被测信号 $x(t)$ 的周期。

C2 周期信号的数字滤波

这里所需要的数字滤波，只希望能够保留信号基波频率特征不变，滤除所有其他谐波分量，最终获得一个正弦波序列，因而有许多低通滤波器可以采用。

本节提供一种数字滤波器，只要信号周期足够准确，经过它滤波后的基波信号参数将不会被改变，比较适合精确测量的要求。

C2.1 数字滤波的时域实现

为叙述方便起见，将周期信号 $x(t)$ 的基波表示为四参数正弦波方式：

$$x_1(t) = x(t, \bar{\omega}_0) = C_0 \cdot \sin(\bar{\omega}_0 \cdot t + \varphi_0) + D_0 \quad (\text{C2})$$

它包含四个独立的参量，幅度 C_0 、频率 $\bar{\omega}_0$ 、相位 φ_0 和直流分量 D_0 ， $\bar{\omega}_0 = 2\pi/T_0$ 。

设，周期信号 $x(t, \bar{\omega}_0)$ 测量序列经过时域滤波后获得的波形为 $y(t, \bar{\omega}_0)$ ，取

$$h = \frac{\bar{\omega}_0}{2\sin(\bar{\omega}_0 T)} \quad (\text{C3})$$

则滤波过程为：

$$\begin{aligned} y(t, \bar{\omega}_0) &= \int_{+t-T}^{+t+T} hx(\tau, \bar{\omega}_0) d\tau - (2hT - 1)D_0 \\ &= \frac{2h\sin(\bar{\omega}_0 T)}{\bar{\omega}_0} C_0 \sin(\bar{\omega}_0 t + \varphi_0) + D_0 \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

令 $y(t, \bar{\omega}_0) = x(t, \bar{\omega}_0)$ ，则，

JJF 1152—2006

(1) 当 $\bar{\omega}_0 T = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n 为整数, 即 $T = (1/4 + n/2) \cdot T_0 \equiv T_2$ 时, $h = (-1)^n \cdot \bar{\omega}_0/2 \equiv h_2$, 有

$$\begin{aligned} y(t, \bar{\omega}_0) &= x(t, \bar{\omega}_0), & \text{基波信号保持不变} \\ y(t, 2n \cdot \bar{\omega}_0) &= 0, & \text{偶次谐波已被滤除} \end{aligned}$$

(2) 当 k 为奇数, $k\bar{\omega}_0 T = n\pi$, n 为非零整数且不为 k 的整数倍, 即 $T = \frac{nT_0}{2k} \equiv T_k$ 时, $h = \frac{\bar{\omega}_0}{2\sin(n\pi/k)} \equiv h_k$, 有

$$\begin{aligned} y(t, \bar{\omega}_0) &= x(t, \bar{\omega}_0), & \text{基波信号保持不变} \\ y(t, k\bar{\omega}_0) &= 0, & \text{k次谐波已被滤除} \end{aligned}$$

选取参数 h_k 和 T , 对 $x(t, \bar{\omega}_0)$ 进行积分获得 $y(t, \bar{\omega}_0)$ 的上述过程, 即是单频正弦曲线谐波及噪声失真的滤波过程, 可滤除所有偶次和所指定的奇次谐波。

T 可以通过周期计数法进行预估计。

C2.2 单频滤波器的频域表示

由式(C4)两边取傅氏变换得:

$$\begin{aligned} Y(\bar{\omega}) &= F[y(t, \bar{\omega}_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t, \bar{\omega}_0) e^{-j\bar{\omega}t} dt = H_0(\bar{\omega}) \cdot X(\bar{\omega}) \\ H_0(\bar{\omega}) &= \frac{h2\sin(\bar{\omega}T)}{\bar{\omega}} - (2h \cdot T - 1)2\pi\delta(\bar{\omega}) \end{aligned}$$

其中, $h = \frac{\bar{\omega}_0}{2\sin(\bar{\omega}_0 T)}$, 而 $X(0) = D_0$ 。

(1) 当 $\bar{\omega}_0 T = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n 为整数, 即 $T = (1/4 + n/2) \cdot T_0 \equiv T_2$ 时, $h = (-1)^n \cdot \bar{\omega}_0/2 \equiv h_2$, 由 $H_0(\bar{\omega})$ 得滤除偶次谐波的滤波器:

$$H_2(\bar{\omega}) = (-1)^n \frac{\sin(\bar{\omega}T_2)}{\bar{\omega}/\bar{\omega}_0} - (2h_2 T_2 - 1)2\pi\delta(\bar{\omega})$$

(2) 当 k 为奇数, $k\bar{\omega}_0 T = n\pi$, n 为非 0 整数且不为 k 的整数倍, 即 $T = n \cdot T_0 / (2k) \equiv T_k$ 时, $h = \frac{\bar{\omega}_0}{2 \cdot \sin(n\pi/k)} \equiv h_k$, 由 $H_0(\bar{\omega})$ 得滤除 k 次谐波的滤波器:

$$H_k(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}_0}{\sin(n\pi/k)} \cdot \frac{\sin(\bar{\omega}T_k)}{\bar{\omega}} - (2h_k T_k - 1)2\pi\delta(\bar{\omega})$$

(3) 当要求滤除所有偶次谐波和 3、5、…、直至 k 次谐波时, 将 $H_2(\bar{\omega})$ 、 $H_3(\bar{\omega})$ 、 $H_5(\bar{\omega})$ 、…、 $H_k(\bar{\omega})$ 级联, 得到滤除单频正弦曲线谐波失真的滤波器 $H(\bar{\omega})$:

$$H(\bar{\omega}) = H_2(\bar{\omega}) \cdot H_3(\bar{\omega}) \cdot H_5(\bar{\omega}) \cdot \dots \cdot H_k(\bar{\omega}) \quad (C5)$$

$H(\bar{\omega})$ 就是本节所述的单频正弦曲线谐波及噪声失真滤波器的通用表达式, 理论上, 它可以滤除全部偶次谐波和直至 k 次的奇次谐波。

原理上, 周期信号 $x(t)$ 的采样序列经过式(C5)所示的滤波器组滤波后, 将变成只

JJF 1152—2006

含有基波信号的正弦波序列 $x_1(t)$ ，它的周期与 $x(t)$ 完全一致，只要确定了 $x_1(t)$ 的频率和周期，就可以实现 $x(t)$ 周期的测量评价。通过正弦波四参数最小二乘曲线拟合法即可实现这一目的。

C3 基波序列的最小二乘正弦波曲线拟合

本节所述内容，是要从周期信号 $x(t)$ 的采样序列经过滤波后形成的基波正弦数据序列 $x_1(t)$ 中，精确获得其波形参数，所用的是正弦波四参数最小二乘曲线拟合法，过程如下：

设：波形数据采集系统的量程为 E_r ，通道采集速率 v ；被评价的正弦波信号：

$$x_1(t) = C_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) + D_0$$

$$C_0 \leq E_r/2, f_0 \leq v/3$$

$x_1(t)$ 的采集数据序列为 $x_i (i=1, \dots, n)$ ，按最小二乘法求出采集数据 x_i 的最佳拟合信号：

$$a(t) = C \cdot \sin(2\pi \cdot ft + \varphi) + D \quad (C6)$$

由于实际的采集数据是一些离散化的值 x_i ，对应地，其时间也是离散化的 t_i ， $t_i = i/v$ ，这样，式(C6)变成了：

$$a(t_i) = C \sin(2\pi f t_i + \varphi) + D$$

简记为：

$$a_{(i)} = C \sin(\omega i + \varphi) + D \quad (C7)$$

$$\omega = 2\pi f_0/v$$

则，实际有效值误差 ϵ_{rms} 为：

$$\epsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [x_i - C \sin(\omega i + \varphi) - D]^2}$$

当 ϵ_{rms} 最小时，可得式(C2)的最小二乘意义下的拟合正弦波如式(C7)，此时，得到拟合结果 C 、 ω 、 φ 、 D 和 ϵ_{rms} 。则，正弦波信号 $x_1(t)$ 的幅度为 C ；相位为 φ ；直流分量为 D ；波形的总失真度 $TD = \sqrt{2} \cdot \epsilon_{\text{rms}}/C$ 。

由 ω 与采集速率 v 及正弦波信号 $x_1(t)$ 频率 f_0 的关系，可获得信号频率 f_0 和周期 T_0 的评价结果：

$$f_0 = \frac{v \omega}{2\pi} \quad (C8)$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{v \omega} \quad (C9)$$

附录 D

任意波发生器分辨率精确测量方法

任意波发生器的分辨率在全量程范围内都是基本不变的，而数字多用表在测量 0 附近的输入时，可以使用小量程获得比较高的测量准确度：当大信号输入时，不能使用小量程，而数字多用表的分辨率是针对所用量程并且是有限的，此时对于任意波发生器的小分辨量值不易获得较高的准确度，这时，可使用下列辅助测量手段实现精确测量。

接线如图 D1，选定任意波发生器的校准通道及量程，设定任意波发生器的 D/A 取样速率和波形存储深度，令直流偏置为 0，被校任意波发生器端接匹配负载，且输出为 x ；调整高稳定直流信号源输出一个幅度接近 x 的稳定信号 U_c ，用数字电压表读取相应的任意波发生器与高稳定直流信号源输出之差 $y = x - U_c$ 。

使任意波发生器分别输出本量程下，幅度相邻的两个 D/A 数字码对应的直流信号 x_1 和 x_2 ，用数字电压表读取相应的测量值 y_1 和 y_2 。则，任意波发生器本量程的幅度分辨率 Δy ：

$$\Delta y = |y_1 - y_2| \quad (D1)$$

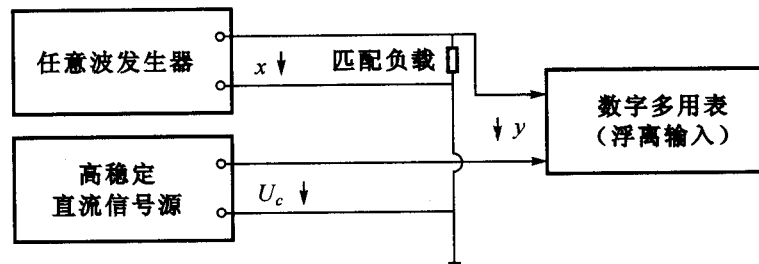


图 D1 任意波发生器静态分辨率校准连线框图

附录 E

测量不确定度评定

E1 任意波发生器取样速率的测量不确定度评定

D/A 取样速率的校准时,使用的方式为直接测量法,所以在分析测量不确定度时按直接测量进行评定。使用的测量标准技术指标的影响按照 B 类方法给出不确定度,而测量数据分散性按 A 类方法给出不确定度,然后计算其合成不确定度 u_c 及扩展不确定度 U :

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + \sum_{i=1}^N u_{Bi}^2}; U = ku_c$$

设每个信号周期数据点数为 N_T , 由频率计读取的信号频率 f , 则, 任意波发生器的 D/A 取样速率: $v = N_T \times f$

其中, N_T 为人为设定的准确值, 没有误差。则, $dv = N_T df$, $\frac{dv}{v} = \frac{df}{f}$

取样速率误差主要来源于频率计频率 f 的读数误差, 两者的相对不确定度相等。而频率计读数的不确定度来源于 3 个方面:

(1) 内部时基 (晶振) 引入的不确定度

主要包括日老化率、随电源变化及温度影响带来的不确定度, 老化率按日计算, 误差界为 $\pm 5 \times 10^{-9}/d$, 电源变化按 5V 计算, 误差界为 $\pm 2.5 \times 10^{-8}$, 温度变化按 5℃ 计算, 误差界为 $\pm 2.5 \times 10^{-8}$, 三者都按均匀分布计, 则内部时基 (晶振) 引入的相对不确定度为: $u_{B1} = 2.2 \times 10^{-8}$;

(2) 测量有效位数 (读值跳字) 引入的不确定度

以频率为 $f = 350\text{kHz}$ 计算, 分辨力 1Hz, 误差界为 1 个字 (即 $\pm 1\text{Hz}$), 按均匀分布计, 则测量有效位数 (1 个字) 引入的相对不确定度: $u_{B2} = 1.7 \times 10^{-6}$;

(3) 测量重复性引入的不确定度

经多次重复测量, 用统计分析方法获得测量重复性引入的相对不确定度:

$$u_A = 2.0 \times 10^{-8}$$

合成标准不确定度为: $u_c = 1.7 \times 10^{-6}$

将上述 3 项不确定度列表如下:

JJF 1152—2006

表 E1.1 各不确定度分量及其分布列表

不确定度分量	量值	分布
重复性引入的不确定度 u_A	2.0×10^{-8}	正态
内部时基(晶振)引入的不确定度 u_{B1}	2.2×10^{-8}	三角
测量有效位数(1个字)引入的不确定度 u_{B2}	1.7×10^{-6}	均匀
合成标准不确定度 u_c	1.7×10^{-6}	均匀

从上述表 E1.1 所示的各分量分布和量值可见, 合成标准不确定度 u_c 中存在占绝对优势的不确定度分量 u_{B2} , 且 u_{B2} 服从均匀分布, 可判定 u_c 也近似服从均匀分布。取置信概率 $p=100\%$, 则扩展因子为 $k_{100}=1.732$, 可得取样速率的扩展不确定度(相对值) U 为:

$$U = k_{100} u_c = 2.9 \times 10^{-6}$$

E2 任意波发生器信号频率的测量不确定度评定

从上述 E1 节中的公式 $\frac{dv}{v} = \frac{df}{f}$ 可见, 任意波发生器产生的信号频率的相对不确定度与其 D/A 取样速率的相对不确定度相同, 因此, 使用相同的过程和手段可得使用时间频率计数器直接读取法获得的信号频率的测量不确定度。

E3 上升时间的测量不确定度评定

E3.1 测量原理与方法

如图 E3.1 所示, 为一个阶跃信号上升沿的测量波形曲线图, 假设测量系统的上升时间为 t_0 , 其扩展不确定度为 $U(t_0)$, $k=2$ 。阶跃信号上升时间 T_r 为待测参数。首先, 用众数法获得阶跃波形曲线的顶 x_T 和底 x_B 的测量值。即, 将测量系统包含信号波形的测量范围区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 等分为 M 份, 每份宽度为:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \quad (\text{E3.1})$$

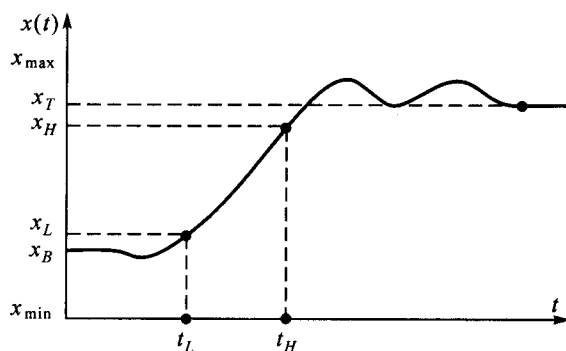


图 E3.1 阶跃信号波形

JJF 1152—2006

将 M 份小区间依次编号为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_M$, 用众数法确定在 x_T 附近, 阶跃波形曲线以最大频率落在某一区间时, 该区间中点值即是 x_T 的测量值。同理可得 x_B 的测量值。

则, 顶 x_T 和底 x_B 之间, 10%阶跃幅度点幅值 x_L 和 90%阶跃幅度点幅值 x_H 分别分:

$$x_L = x_B + 0.1(x_T - x_B) = 0.9x_B + 0.1x_T \quad (\text{E3.2})$$

$$x_H = x_B + 0.9(x_T - x_B) = 0.1x_B + 0.9x_T \quad (\text{E3.3})$$

由 x_L 在阶跃波形曲线上以线性插值法找到相对应的时刻 t_L , 由 x_H 在阶跃波形曲线上以线性插值法找到相对应的时刻 t_H 。则, 阶跃信号上升时间为:

$$T_r = \sqrt{(t_H - t_L)^2 - t_0^2} \quad (\text{E3.4})$$

E3.2 测量不确定度模型

由式(E3.4)可见, 上升时间测量结果 T_r 与 t_H 、 t_L 、 t_0 有关, 而 t_H 、 t_L 与 x_T 、 x_B 以及阶跃波形曲线斜率 $x'(t_L)$ 、 $x'(t_H)$ 均有关, 由此可得上升时间不确定度的主要来源为:

- (1) 测量系统上升时间 t_0 及其不确定度 $u(t_0)$;
- (2) 阶跃信号顶值的 x_T 测量不确定度 $u(x_T)$;
- (3) 阶跃信号底值的 x_B 测量不确定度 $u(x_B)$;
- (4) 由 T_r 测量重复性引入的不确定度 u_A 。

由式(E3.4)可得:

$$dT_r = \frac{t_H - t_L}{T_r} d(t_H - t_L) - \frac{t_0}{T_r} dt_0 \quad (\text{E3.5})$$

显然 t_0 与 $(t_H - t_L)$ 不相关, 则, 使用 t_0 可能出现的最大值 T_0 代替 t_0 , 得合成标准不确定度:

$$u_c(T_r) = \sqrt{\frac{(t_H - t_L)^2}{T_r^2} u^2(t_H - t_L) + \frac{T_0^2}{T_r^2} u^2(t_0) + u_A^2} \quad (\text{E3.6})$$

可以认为 x_T 的测量误差在区间 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$ 内服从均匀分布, 则其实验标准偏差:

$$s(x_T) = \frac{0.5\Delta x}{\sqrt{3}} = s_x \quad (\text{E3.7})$$

不确定度: $u(x_T) = s(x_T)$

同理可得, x_B 的实验标准偏差:

$$s(x_B) = \frac{0.5\Delta x}{\sqrt{3}} = s_x$$

JJF 1152—2006

不确定度: $u(x_B) = s(x_B)$

可以认为 x_T 与 x_B 不相关, 则由式(E3.2)及(E3.3)可得:

$$dx_L = 0.9dx_B + 0.1dx_T$$

$$dx_H = 0.1dx_B + 0.9dx_T$$

不确定度:

$$u(x_L) = \sqrt{0.9^2 u^2(x_B) + 0.1^2 u^2(x_T)}$$

$$u(x_H) = \sqrt{0.1^2 u^2(x_B) + 0.9^2 u^2(x_T)}$$

实验方差:

$$s^2(x_L) = 0.81s^2(x_B) + 0.01s^2(x_T)$$

$$s^2(x_H) = 0.01s^2(x_B) + 0.81s^2(x_T)$$

协方差:

$$s(x_L, x_H) = E\{[x_L - E(x_L)][x_H - E(x_H)]\} = 0.09[s^2(x_B) + s^2(x_T)]$$

相关系数:

$$r(x_L, x_H) = \frac{s(x_L, x_H)}{s(x_L)s(x_H)} = 0.22$$

由 $dx = x'(t)dt$ 得, $u(t) = \frac{u(x)}{x'(t)}$

不确定度:

$$u(t_L) = \frac{u(x_L)}{x'(t_L)}; u(t_H) = \frac{u(x_H)}{x'(t_H)}$$

实验标准偏差:

$$s(t_L) = \frac{s(x_L)}{x'(t_L)}; s(t_H) = \frac{s(x_H)}{x'(t_H)}$$

实验协方差:

$$s(t_L, t_H) = \frac{s(x_L, x_H)}{x'(t_L)x'(t_H)}$$

相关系数:

$$r(t_L, t_H) = \frac{s(t_L, t_H)}{s(t_L)s(t_H)} = r(x_L, x_H)$$

实际上, 阶跃波形曲线在区间 $[t_L, t_H]$ 内可以近似认为是一条直线, 则有:

$$x'(t_L) \approx x'(t_H) \approx \frac{0.8(x_T - x_B)}{t_H - t_L}$$

$$u^2(t_H - t_L) = u^2(t_H) + u^2(t_L) - 2r(t_H, t_L)u(t_H)u(t_L)$$

$$= u^2(t_H) + u^2(t_L) - 0.44u(t_H)u(t_L) = \frac{2.4375(t_H - t_L)^2 s_x^2}{(x_T - x_B)^2}$$

则式(E3.6)变为:

$$\begin{aligned} u_c(T_r) &= \sqrt{\frac{2.4375(t_H - t_L)^4 s_x^2}{T_r^2 (x_T - x_B)^2} + \frac{T_0^2}{T_r^2} u^2(t_0) + u_A^2} \\ &= \sqrt{c_1^2 u_x^2 + c_2^2 u^2(t_0) + u_A^2} \end{aligned} \quad (\text{E3.8})$$

E3.3 测量数据及处理

图 E3.2 是使用某公司的数字存储示波器, 获得的某信号源阶跃波形的测量结果曲线图。

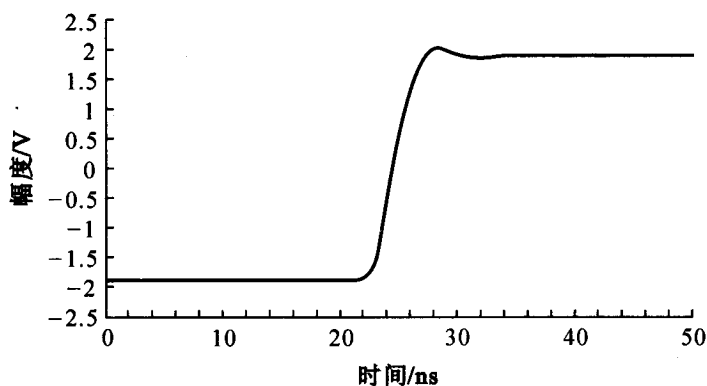


图 E3.2 阶跃信号波形特性 $x(t)$

其中, 数字存储示波器 A/D 位数 $b = 8$, 标称输入频带宽度为 1GHz, 其上升时间 $t_0 = 397\text{ps}$, 扩展不确定度 $U_{95}(t_0) = 4\text{ps}$, 其包含因子 $k_{95} = 2$ 。测量范围 $-2.5\text{V} \sim 2.5\text{V}$, 幅度测量允许误差极限为 $\pm 1\%$; 数字存储示波器的采样点数为 $n = 2500$, 采集速率为 50GSa/s , 信号源的信号阶跃幅度为 3.8V , 重复频率为 1kHz 。

取测量范围区间 $[x_{\min}, x_{\max}] = [-2.5\text{V}, 2.5\text{V}]$, $M = 2^b = 256$, 由式(E3.1)得 $\Delta x = 19.53125\text{mV}$, 由式(E3.7)得 $s_x = 5.64\text{mV}$; 顶 x_T 和底 x_B 的测量不确定度均为:

$u_x = s_x = 5.64\text{mV}$, u_x 自身的相对不确定度 $u(u_x)/u_x$ 以 10% 估计, 则其自由度为:

$$\nu(x_T) = \nu(x_B) = \nu_x = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

由测量曲线得: $x_B = 1.90\text{V}$, $x_T = -1.88\text{V}$, $t_H - t_L = 3.440\text{ns}$ 。

另由 $t_0 = 397\text{ps}$, $U(t_0) = 4\text{ps}$ ($k = 2$) 可以估计 $T_0 = t_0 + U(t_0) = 401\text{ps}$, $u(t_0) = 2\text{ps}$ 。 $u(t_0)$ 自身的相对不确定度 $u[u(t_0)]/u(t_0)$ 以 10% 估计, 则其自由度为:

$$\nu(t_0) = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

将上述数据代入式(E3.4)得 $T_r = 3.417\text{ns}$;

JJF 1152—2006

E3.4 合成标准不确定度计算

将上述数据代入式(E3.8)得： $c_1 = 1.413\text{ns/V}$ ， $c_2 = 0.11794$ 。

重复进行上升时间的测量后，获得测量结果如表 E3.1 所示：

表 E3.1 任意波发生器阶跃脉冲参数实验结果

通道	量程 /V	信号幅度 /V	取样速率 /Sa/s	数据个数	上升时间 T_r/ns
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.426
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.422
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.438
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.442
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.440
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.440
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.448
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.442
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2500	3.436
1	±2.5	3.8	5×10^{10}	2048	3.444

由表 E3.1 得上升时间的平均测量结果： $\bar{T}_r = 3.438\text{ns}$ ， $u_A = 0.008025\text{ns}$ ，自由度 $\nu_A = 9$ 。

合成标准不确定度： $u_c(T_r) = 11.29\text{ps}$

可得其合成标准不确定度的有效自由度：

$$\nu_{\text{eff}}(T_r) = \frac{u_c^4(T_r)}{\sum_{i=1}^3 \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(T_r)}{\frac{c_1^4 u_x^4}{\nu_x} + \frac{c_2^4 u^4(t_0)}{\nu(t_0)} + \frac{u_A^4}{\nu_A}}$$

$$= \frac{11.29^4}{\frac{1413^4 \times 0.00564^4}{50} + \frac{0.11794^4 \times 2^4}{50} + \frac{8^4}{9}} = 30.32$$

E3.5 扩展不确定度

选取置信概率 $p = 95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(T_r) = 30$ ，经 t 分布表查得包含因子 $k_{95} = 2.042$ ，则可得上升时间的扩展不确定度：

$$U_{95}(T_r) = k_{95} \cdot u_c(T_r) = 23\text{ps}$$

E3.6 测量结果的最终表述

阶跃波形曲线的上升时间：

$$T_{r,0} = T_r \pm U_{95}(T_r) = (3.417 \pm 0.023)\text{ns} \quad (k = 2.042, p = 95\%)$$

JJF 1152—2006

其中，“±”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k_{95}=2.042$ ，由置信概率 $p=95\%$ ，有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(T_r)=30$ ，据 t 分布表查得。

E4 方波幅度的测量不确定度评定

E4.1 测量原理与方法

图 E4.1 所示为波形测量系统测量方波信号获得的波形曲线示意图，假设波形测量系统的幅度测量误差极限为 $\pm \Delta y$ 。首先，用众数法获得方波曲线波形的顶 x_T 和底 x_B 的测量值。即，将方波测量系统包含信号波形的测量范围区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 等分为 M 份，每份宽度为：

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M} \quad (\text{E4.1})$$

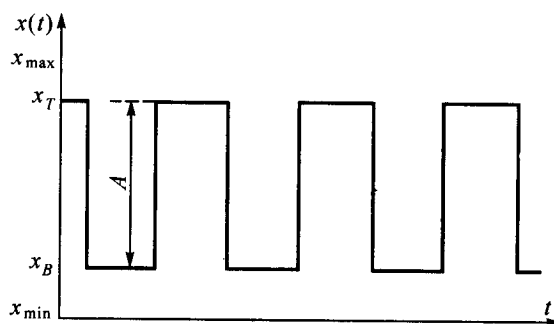


图 E4.1 方波信号波形曲线

将 M 份小区间依次编号为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_M$ ，用众数法确定在 x_T 附近，方波曲线以最大频率落在某一区间时，该区间中点值即是 x_T 的测量值。同理可得 x_B 的测量值。

由顶 x_T 和底 x_B ，可得方波峰-峰值幅度为：

$$A = x_T - x_B \quad (\text{E4.2})$$

E4.2 测量不确定度模型

由式(E4.2)可见，方波峰-峰值幅度的测量结果 A 与 x_T 、 x_B 有关，而 x_T 、 x_B 与 Δy 、 Δx 均有关，由此可得方波峰-峰值幅度不确定度的主要来源为：

(1) 方波信号顶值 x_T 的测量不确定度 $u(x_T)$

$u(x_T)$ 主要有两个分量：波形测量系统的幅度测量误差 $\pm \Delta y$ ，其带来的不确定度 $u_T(\Delta y)$ ；众数法分辨区间宽度 Δx ，其带来的不确定度 $u_T(\Delta x)$ ；

(2) 方波信号底值 x_B 的测量不确定度 $u(x_B)$

$u(x_B)$ 也主要有两个分量：波形测量系统的幅度测量误差 $\pm \Delta y$ ，其带来的不确定度 $u_B(\Delta y)$ ；众数法分辨区间宽度 Δx ，其带来的不确定度 $u_B(\Delta x)$ ；

由式(E4.2)微分可得：

JJF 1152—2006

$$dA = dx_T - dx_B \quad (\text{E4.3})$$

显然可以认为 x_T 与 x_B 不相关, 得 A 的合成标准不确定度:

$$u_c(A) = \sqrt{u^2(x_T) + u^2(x_B)} \quad (\text{E4.4})$$

设众数法分辨区间宽度 Δx 造成的幅度测量误差在区间 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$ 内服从均匀分布, 则其实验标准偏差:

$$s(\Delta x) = \frac{0.5\Delta x}{\sqrt{3}} = s_x \quad (\text{E4.5})$$

不确定度: $u(\Delta x) = s(\Delta x)$; $u_T(\Delta x) = u_B(\Delta x) = u(\Delta x) = s(\Delta x)$;

设波形测量系统的顶值幅度测量误差在区间 $[-\Delta y_T, \Delta y_T]$ 内服从均匀分布, 则其实验标准偏差:

$$s(\Delta y_T) = \frac{\Delta y_T}{\sqrt{3}} = s_{yT} \quad (\text{E4.6})$$

不确定度: $u_T(\Delta y) = s(\Delta y_T)$;

设波形测量系统的底值幅度测量误差在区间 $[-\Delta y_B, \Delta y_B]$ 内服从均匀分布, 则其实验标准偏差:

$$s(\Delta y_B) = \frac{\Delta y_B}{\sqrt{3}} = s_{yB} \quad (\text{E4.7})$$

不确定度: $u_B(\Delta y) = s(\Delta y_B)$ 。

可以认为 Δx 、 Δy_T 、 Δy_B 互不相关, 则,

$$u_c(x_T) = \sqrt{u_T^2(\Delta x) + u_T^2(\Delta y)} = \sqrt{s_x^2 + s_{yT}^2} \quad (\text{E4.8})$$

$$u_c(x_B) = \sqrt{u_B^2(\Delta x) + u_B^2(\Delta y)} = \sqrt{s_x^2 + s_{yB}^2} \quad (\text{E4.9})$$

$$u_c(A) = \sqrt{2s_x^2 + s_{yT}^2 + s_{yB}^2} \quad (\text{E4.10})$$

E4.3 测量数据及处理

图 E4.2 是使用某公司数字存储示波器测量获得的某信号源的方波信号波形。其信号标称幅度 $A_0 = 4.75\text{V}$, 信号的标称顶值 $x_{T0} = 2.375\text{V}$, 信号的标称底值 $x_{B0} = -2.375\text{V}$, 频率 10kHz 。

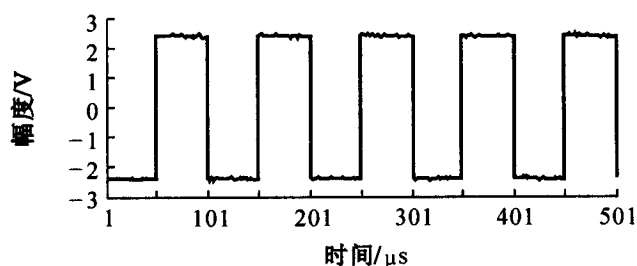


图 E4.2 实测方波信号波形曲线 $x(t)$

JJF 1152—2006

其中, 数字存储示波器 A/D 位数 $b = 8$, 标称输入频带宽度为 1GHz, 测量范围 $-4\text{V} \sim 4\text{V}$, 幅度测量允许误差极限为 $\pm 1\%$ 。波形采样点数为 $n = 1000$, 采集速率为 1MSa/s。

取测量范围区间 $[x_{\min}, x_{\max}] = [-4\text{V}, 4\text{V}]$, 由 $M = 2^b = 256$, 按式(E4.1)得 $\Delta x = 31.25\text{mV}$, 按上述众数法处理图 E4.2 波形所述数据, 可得:

$$x_T = 2.354922\text{V}; x_B = -2.314922\text{V}; A = 4.669844\text{V}$$

其中, 波形的最大值为: $X_{\max} = 2.44\text{V}$; 波形的最小值为: $X_{\min} = -2.4\text{V}$ 。

由式(E4.5)得 $s_x = 9.021\text{mV}$; 由众数区间带来的顶值和底值测量不确定度分别为:

$$u_T(\Delta x) = u_B(\Delta x) = u(\Delta x) = s_x = 9.021\text{mV}$$

$u(\Delta x)$ 自身的相对不确定度 $u[u(\Delta x)]/u(\Delta x)$ 以 10% 估计, 则其自由度为:

$$\nu(\Delta x) = \nu_x = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

由于幅度测量误差极限为 $\pm 1\%$, 设顶值测量误差在区间 $[-\Delta y_T, \Delta y_T] = [-1\% x_T, 1\% x_T] = [-23.55\text{mV}, 23.55\text{mV}]$ 内服从均匀分布, 则由式 (E4.6) 得:

$$s_{yT} = 13.596\text{mV}$$

$$u_T(\Delta y) = s_{yT} = 13.596\text{mV}$$

$u_T(\Delta y)$ 自身的相对不确定度 $u[u_T(\Delta y)]/u_T(\Delta y)$ 以 10% 估计, 则其自由度为:

$$\nu(\Delta y_T) = \nu_{yT} = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

设底值测量误差在区间 $[-\Delta y_B, \Delta y_B] = [-|1\% x_B|, |1\% x_B|] = [-23.15\text{mV}, 23.15\text{mV}]$ 内服从均匀分布, 则由式 (E4.7) 得:

$$s_{yB} = 13.365\text{mV}$$

$$u_B(\Delta y) = s_{yB} = 13.365\text{mV}$$

$u_B(\Delta y)$ 自身的相对不确定度 $u[u_B(\Delta y)]/u_B(\Delta y)$ 以 10% 估计, 则其自由度为:

$$\nu(\Delta y_B) = \nu_{yB} = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

E4.4 合成标准不确定度计算

则由式 (E4.8)、(E4.9) 可得, 顶 x_T 和底 x_B 的合成标准不确定度分别为:

$$u_c(x_T) = 16.317\text{mV}$$

$$u_c(x_B) = 16.125\text{mV}$$

由式 (E4.10) 得 A 的合成标准不确定度:

$$u_c(A) = 22.940\text{mV}$$

将各不确定度分量及分布列表如下:

JJF 1152—2006

表 E4.1 不确定度分量一览表

序号	来源	符号	量值/mV	分布	自由度
1	众数区间	$u_T(\Delta x)$	9.021	均匀	50
2	众数区间	$u_B(\Delta x)$	9.021	均匀	50
3	顶值测量	$u_T(\Delta y)$	13.596	均匀	50
4	底值测量	$u_B(\Delta y)$	13.365	均匀	50

E4.5 扩展不确定度

由表 E4.1 可以判定, 方波顶值测量误差由两个均匀分布的误差分量合成, 应服从梯形分布, 其区间分别为 $[-\Delta y_T, \Delta y_T]$ 和 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$, 则其上下底之比 $\beta =$

$$\left| \frac{\Delta y_T - 0.5\Delta x}{\Delta y_T + 0.5\Delta x} \right| = 0.20230; \text{ 取置信概率 } p = 95\%, \text{ 则有包含因子:}$$

$$k_{95} = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{0.05(1 - \beta^2)}}{\sqrt{\frac{1 + \beta^2}{6}}} & \beta \leq 0.905 \\ \frac{0.95(1 + \beta)}{2\sqrt{\frac{1 + \beta^2}{6}}} & \beta > 0.905 \end{cases} \quad (\text{E4.11})$$

$$k_{95}(x_T) = 1.875$$

顶值 x_T 的扩展不确定度:

$$U_{95}(x_T) = k_{95}(x_T) \times u_c(x_T) = 1.875 \times 16.317\text{mV} = 31\text{mV}$$

同理可以判定, 方波底值测量误差服从梯形分布, 其区间分别为 $[-\Delta y_B, \Delta y_B]$ 和 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$, 取置信概率 $p = 95\%$, 可得, 底值 x_B 的扩展不确定度:

$$U_{95}(x_B) = k_{95}(x_B) \times u_c(x_B) = 1.875 \times 16.125\text{mV} = 30\text{mV}$$

由表 E4.1 可以判定, 方波幅度值 A 测量误差由 4 个均匀分布的误差分量合成, 没有占优势的分量, 其应服从正态分布, 可得其合成标准不确定度的有效自由度:

$$\nu_{\text{eff}}(A) = \frac{u_c^4(A)}{\sum_{i=1}^4 \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(A)}{\frac{u_T^4(\Delta x)}{\nu_x} + \frac{u_T^4(\Delta y)}{\nu_{yT}} + \frac{u_B^4(\Delta x)}{\nu_x} + \frac{u_B^4(\Delta y)}{\nu_{yB}}} = 175$$

选取置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(A) = 175$, 经 t 分布表查得包含因子 $k_{95} = 1.96$, 则可得方波幅度 A 的扩展不确定度:

$$U_{95}(A) = k_{95} \times u_c(A) = 1.96 \times 22.940\text{mV} = 45\text{mV}$$

E4.6 测量结果的最终表述

方波幅度:

JJF 1152—2006

$$A_0 = A \pm U_{95}(A) = (4.670 \pm 0.045)\text{V} \quad (k = 1.96, p = 95\%)$$

其中，“±”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k_{95} = 1.96$ ，由置信概率 $p = 95\%$ ，有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(A) = 173$ ，据 t 分布表查得。

方波顶值：

$$x_{T0} = x_T \pm U_{95}(x_T) = (2.355 \pm 0.031)\text{V}$$

其中，“±”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k_{95} = 1.875$ ，由置信概率 $p = 95\%$ ，梯形分布获得。

方波底值：

$$x_{B0} = x_B \pm U_{95}(x_B) = (-2.315 \pm 0.030)\text{V}$$

其中，“±”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k_{95} = 1.877$ ，由置信概率 $p = 95\%$ ，梯形分布获得。

E5 方波占空比的测量不确定度评定

E5.1 定义

如图 E5.1 所示，设脉冲波形 $x(t)$ 的周期为 T ，顶值为 x_T ，底值为 x_B ，则，其中值 x_M ，均值 x_0 。

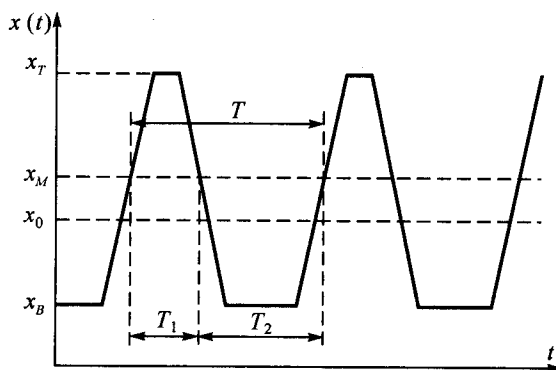


图 E5.1 方波信号模型化表述曲线图

$$x_M = 0.5 \times (x_T + x_B) \quad (\text{E5.1})$$

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (\text{E5.2})$$

以波形 $x(t)$ 与中值 x_M 相交点做测量判据，其顶值所占时间 T_1 和底值所占时间 T_2 ， $T = T_1 + T_2$ ；则脉冲波形的占空比 η 定义为：

$$\eta = T_1/T_2 \quad (\text{E5.3})$$

E5.2 测量原理方法

设被测脉冲波形 $x(t)$ 的上升(下降)时间为 t_r ，则使用上升时间小于 $t_r/3$ 的波形测量设备，以采样间隔 Δt 对 $x(t)$ 执行测量，获得波形采样序列 $x(\Delta t \cdot i)$ ， $(i = 1, \dots,$

JJF 1152—2006

n); 用众数法计算获得波形的顶值为 x_T 、底值为 x_B , 进而按式 (E5.1) 可得其中值 x_M 。从信号序列中截取恰好含有整数个信号波形周期的序列 $x(\Delta t \cdot i)$, ($i=0, 1, \dots, N-1$); 按图 E5.1 所述定义, 统计 N 个样本数据内大于中值 x_M 的采样点数 n_1 和小于中值 x_M 的采样点数 $n_2 = N - n_1$, 则脉冲波型 $x(t)$ 的占空比 η :

$$\eta = \frac{n_1}{n_2} \quad (\text{E5.4})$$

E5.3 误差与不确定度模型分析

由式 (E5.4) 及测量过程, 忽略采样间隔不稳定带来的影响, 可得占空比 η 的测量不确定度来源为:

- (1) n_1 计数误差为 ± 1 , 其不确定度 $u(n_1)$, 给 η 导致的不确定度为 $u_{n_1}(\eta)$;
- (2) n_2 计数误差为 ± 1 , 其不确定度 $u(n_2)$, 给 η 导致的不确定度为 $u_{n_2}(\eta)$;
- (3) 中值点 x_M 的位置不确定度 $u(\Delta x_M)$; 给 η 导致的不确定度为 $u_{x_M}(\eta)$;

设中值位置误差为 Δx_M , 它给时间差带来的误差为 ΔT_{xM} , 给 n_1 计数带来的误差为 Δn_x , 则给 n_2 计数带来的误差将为 $-\Delta n_x$, 有,

$$\Delta T_{xM} = \frac{\Delta x_M t_r}{0.8(x_T - x_B)} \quad (\text{E5.5})$$

$$\Delta n_x = \frac{\Delta T_{xM}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_M t_r}{0.8\Delta t(x_T - x_B)} \quad (\text{E5.6})$$

$$\eta = \frac{n_1 - \Delta n_x}{n_2 + \Delta n_x} \quad (\text{E5.7})$$

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{\eta dn_1}{n_1 - \Delta n_x} - \frac{\eta \cdot dn_2}{n_2 + \Delta n_x} - \frac{(1 + \eta)n_2 \cdot d(\Delta n_x)}{(n_2 + \Delta n_x)^2} \\ &\approx \frac{\eta \cdot dn_1}{n_1} - \frac{\eta \cdot dn_2}{n_2} - \frac{(1 + \eta) \cdot \Delta n_x}{n_2} \end{aligned} \quad (\text{E5.8})$$

假设 N 是由两个互不相关的计数值 n_1 、 n_2 相加获得, 即认为 n_1 、 n_2 、 Δx_M 的误差之间互不相关, 则有 η 的测量不确定度模型:

$$\begin{aligned} u_c(\eta) &= \sqrt{\frac{\eta^2}{n_1^2} u^2(n_1) + \frac{\eta^2}{n_2^2} u^2(n_2) + \frac{(1 + \eta)^2}{n_2^2} u^2(n_x)} \\ &= \sqrt{u_{n_1}^2(\eta) + u_{n_2}^2(\eta) + u_{n_x}^2(\eta)} \end{aligned} \quad (\text{E5.9})$$

由于 n_1 计数的误差界为 ± 1 , 可以认为其误差在 $[-1, 1]$ 内服从均匀分布, 则有,

$$u(n_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_{n_1}(\eta) = \frac{\eta \cdot u(n_1)}{n_1} = \frac{\eta}{n_1 \sqrt{3}};$$

JJF 1152—2006

$u_{n_1}(\eta)$ 的相对不确定度约为 $\frac{\Delta u_{n_1}(\eta)}{u_{n_1}(\eta)} \approx \frac{1}{n_1}$, 则其自由度 ν_1 约为:

$$\nu_1 \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u_{n_1}(\eta)}{u_{n_1}(\eta)} \right]^{-2} = \frac{n_1^2}{2} \quad (\text{E5.10})$$

同理,

$$u(n_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad u_{n_2}(\eta) = \frac{\eta \cdot u(n_2)}{n_2} = \frac{\eta}{n_2 \sqrt{3}}$$

$u_{n_2}(\eta)$ 的相对不确定度约为 $\frac{\Delta u_{n_2}(\eta)}{u_{n_2}(\eta)} \approx \frac{1}{n_2}$, 则其自由度 ν_2 约为:

$$\nu_2 \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u_{n_2}(\eta)}{u_{n_2}(\eta)} \right]^{-2} = \frac{n_2^2}{2} \quad (\text{E5.11})$$

中值点误差 Δx_M 的不确定度, 主要来源于众数法测量 x_T 和 x_B 时的分辨区间 Δx , 以及波形幅度测量误差 Δy ; 可以认为众数分辨力误差在 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$ 内服从均匀分布, 而波形测量误差在 $[-\Delta y, \Delta y]$ 内服从均匀分布, 且两者不相关, 则有:

$$u(\Delta x_M) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta x^2}{6} + \frac{2\Delta y^2}{3}} \quad (\text{E5.12})$$

由式 (E5.6) 得:

$$u(n_x) = \frac{t_r u(\Delta x_M)}{0.8\Delta t(x_T - x_B)} = \frac{t_r}{1.6\Delta t(x_T - x_B)} \sqrt{\frac{\Delta x^2}{6} + \frac{2\Delta y^2}{3}} \quad (\text{E5.13})$$

$$u_{nr}(\eta) = \frac{(1 + \eta)}{n_2} u(n_x) = \frac{t_r(1 + \eta)}{1.6n_2\Delta t(x_T - x_B)} \sqrt{\frac{\Delta x^2}{6} + \frac{2\Delta y^2}{3}} \quad (\text{E5.14})$$

$u_{nr}(\eta)$ 的相对不确定度约为 $\frac{\Delta u_{nr}(\eta)}{u_{nr}(\eta)}$, 则其自由度 ν_3 约为:

$$\nu_3 \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u_{nr}(\eta)}{u_{nr}(\eta)} \right]^{-2} \quad (\text{E5.15})$$

则, 可由式 (E5.9) 得 η 的合成标准不确定度:

$$u_c(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^2}{3n_1^2} + \frac{\eta^2}{3n_2^2} + u_{nr}^2(\eta)} \quad (\text{E5.16})$$

E5.4 实验数据及处理结果

图 E5.2 是使用某公司数字存储示波器测量获得的某信号源方波信号波形。其信号标称峰-峰值幅度 $A_0 = 3\text{V}$, 频率 1.1MHz , 占空比 $\eta_0 = 1$ 。

其中, 数字存储示波器 A/D 位数 $b = 8$, 标称输入频带宽度为 1GHz , 幅度量程为 $E_r = 8\text{V}(1\text{V}/\text{div})$, 幅度测量允许误差极限为 $\pm 1\%$ 。波形采样点数为 $n = 15000$, 采集速率为 $2\text{GSa}/\text{s}$ 。

JJF 1152—2006

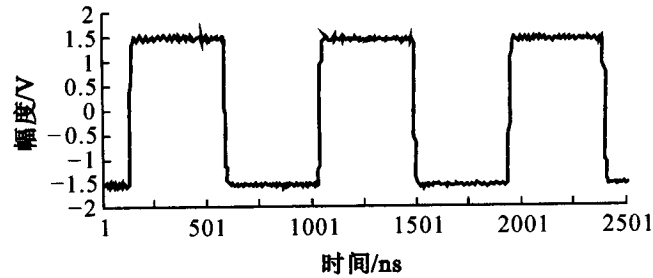


图 E5.2 实测脉冲信号波形曲线 $x(t)$

则众数区间 $\Delta x = E_r/2^b = 31.25\text{mV}$; 波形测量误差极限 $\Delta y = 0.5E_r \times 1\% = 40\text{mV}$; 使用众数法处理测量结果, 获得脉冲波形的上升时间 $t_r = 11.4\text{ns}$, 顶值 $x_t = 1.526094\text{V}$, 底值 $x_b = -1.486094\text{V}$, 中值 $x_0 = -5.2374\text{mV}$;

使用幅值统计测量法获得: $n_1 = 7258$, $n_2 = 7287$; $u_{n1}(\eta) = 7.92 \times 10^{-5}$, $u_{n2}(\eta) = 7.89 \times 10^{-5}$, $u_{nx}(\eta) = 4.57 \times 10^{-5}$; 各不确定度分量如下表 E5.1 所示:

表 E5.1 不确定度分量表

不确定度分量		自由度	分布
$u_{n1}(\eta)$	7.92×10^{-5}	$\nu_1 = 26339282$	均匀
$u_{n2}(\eta)$	7.89×10^{-5}	$\nu_2 = 26550184$	均匀
$u_{nx}(\eta)$	4.57×10^{-5}	$\nu_3 = 50$	梯形

设 $u_{nx}(\eta)$ 的相对不确定度约为 $\frac{\Delta u_{nx}(\eta)}{u_{nx}(\eta)} = 10\%$, 则其自由度 $\nu_3 \approx 50$ 。

$$u_c(\eta) = 1.2 \times 10^{-4}$$

从表 E5.1 中可见, 各不确定度分量中, 无占优势地位的分量, 判定其合成标准不确定度服从正态分布, 可得其合成标准不确定度的有效自由度:

$$\nu_{\text{eff}}(\eta) = \frac{u_c^4(\eta)}{\sum_{i=1}^3 \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(\eta)}{\frac{u_{n1}^4(\eta)}{\nu_1} + \frac{u_{n2}^4(\eta)}{\nu_2} + \frac{u_{nx}^4(\eta)}{\nu_3}} = 2377$$

选取置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(\eta) = 2377$ 分布表查得包含因子 $k_{95} = 1.96$, 则可得占空比 η 的扩展不确定度:

$$U_{95}(\eta) = k_{95} \cdot u_c(\eta) = 0.00024$$

则最终获得占空比:

$$\eta = 0.99602 \pm 0.00024$$

其中, 包含因子 $k = 1.96$, 为置信概率 $p = 95\%$, 在有自由度 $\nu_{\text{eff}}(\eta) = 2377$ 下, 经 t 分布表查得。

JJF 1152—2006

E6 交流增益及正弦波形幅度的不确定度评定

E6.1 测量原理与方法

交流增益评价的基本思想,是通过测量系统对一个单频正弦波信号的采集数据,运用曲线拟合的方法,计算出该正弦信号的幅度值作为输入信号幅度测量值,从而获取交流增益值。具体作法如下:

设:测量系统通道的量程为 E_r , 通道采集速率 v ; $E \leq E_r/2$, $f_0 \leq v/3$, (推荐取 $f_0 = N \cdot v/n$); 给测量系统加载一个正弦波信号:

$$e(t) = E \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (\text{E6.1})$$

其中, n 为通道采集数据个数, N 为通道采集的信号整周期个数; n 与 N 不能有公共因子。

启动采集,得一组采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$, 按最小二乘法求出数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号:

$$a(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi) + d \quad (\text{E6.2})$$

其中, $a(t)$ 为拟合信号的瞬时值; A 为拟合正弦波形的幅度; f 为拟合正弦波形的频率; φ 为拟合正弦波形的初相位; d 为拟合信号的直流分量值。

由于采集数据是一些离散化的值 x_i , 对应地,其时间也是离散化的 t_i , 其中, $t_i = i/v$ 为第 i 个测量点的时刻, ($i=1, \dots, n$); 这样,式 (E6.2) 变成了:

$$a(t_i) = A \sin(2\pi f t_i + \varphi) + d$$

简记为:

$$a_{(i)} = A \sin(\omega i + \varphi) + d \quad (\text{E6.3})$$

其中 $\omega = 2\pi f_0/v$; 则,实际偏差有效值 ρ 为:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \sin(\omega i + \varphi) - d)^2}$$

当实际偏差有效值 ρ 最小时,可获得式 (E6.1) 的最小二乘意义下的拟合正弦波信号式 (E6.3), 其中拟合信号的幅度 A 为输入信号幅度测量值。交流增益:

$$G = A/E \quad (\text{E6.4})$$

E6.2 测量不确定度模型

由式 (E6.4) 可见,交流增益 G 与信号峰值 E 以及拟合幅度 A 均有关,而采集正弦波序列的谐波失真、杂波和噪声、量化误差、抖动、序列长度、以及序列中所含信号周期个数均将给拟合幅度带来影响,因此,可以列出交流增益 G 测量不确定度的主要来源:

- (1) 信号源幅度的误差。它带来的正弦交流信号峰值 E 的不确定度 $u_1 = u(E)$;
- (2) 采样序列的谐波失真。主要由信号的谐波失真、采集系统的非线性误差等因素

JJF 1152—2006

造成,它带来的幅度 A 测量不确定度 u_2 ;

(3) 采样序列的噪声及非谐波失真。主要由信号的随机噪声、杂波失真,采集系统的量化误差等因素造成,实际也包含没有在第(2)项的谐波失真中被计入的高次谐波失真分量和微弱的较低次谐波失真分量的影响,它带来的幅度 A 的测量不确定度 u_3 ;

(4) 采样序列的抖动。主要由信号周期不稳定、以及采样间隔不稳定带来的测量序列的信号周期性变动造成,它带来的幅度 A 的测量不确定度 u_4 ;

(5) 四参数正弦波拟合软件误差。主要由于软件收敛判据、舍入误差、累积误差等造成,它造成的幅度 A 测量不确定度 u_5 ;

(6) 另外,采集序列长度的变化、序列中所含信号周期个数的变化,也将给交流增益的测量带来影响,它们将体现在上述各项不确定度的分量中,不单独列出。

由式(E6.4)可得:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial A} dA + \frac{\partial G}{\partial E} dE = \frac{1}{E} dA - \frac{A}{E^2} dE \quad (\text{E6.5})$$

$$\text{灵敏系数: } c(A) = \frac{\partial G}{\partial A} = \frac{1}{E}; \quad c(E) = \frac{\partial G}{\partial E} = -\frac{A}{E^2}$$

应用测量值的不确定度传递公式,在本测量过程中,显然可以认为:幅度 A 不同的不确定度分量之间不相关;则幅度 A 的合成标准不确定度 $u_c(A)$,

$$u_c(A) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} \quad (\text{E6.6})$$

交流增益 G 的不确定度分量中,可以认为, $u(E)$ 与 $u(A)$ 不相关,则,其合成标准不确定度 $u_c(G)$ 。

$$\begin{aligned} u_c(G) &= \sqrt{c^2(E) \cdot u^2(E) + c^2(A) \cdot u_c^2(A)} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 u_1^2}{E^4} + \frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2}{E^2}} \end{aligned} \quad (\text{E6.7})$$

四参数正弦波拟合中,误差界的指数表达式给出了估计参数依信号周期个数和谐波阶次变化而变化趋势的一个较好拟合结果。该结果中,若 ΔN 为信号周期数误差; ΔA 为信号拟合幅度误差; $\Delta \varphi$ 为信号拟合相位误差; Δd 为信号直流分量估计值误差; n 为记录数据个数($n \geq 2Nh$); N 为记录中所含信号周期个数($\omega n T)/(2\pi)$; h 为谐波阶次,则估计参数误差的误差界如下:

$$\max |\Delta N| = \frac{0.90}{(Nh)^{1.2}} \cdot \frac{A_h}{A} \quad (\text{E6.8})$$

$$\max \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \quad (\text{E6.9})$$

$$\max |\Delta \varphi| = \frac{180^\circ}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \quad (\text{E6.10})$$

JJF 1152—2006

$$\max \left| \frac{\Delta d}{A} \right| = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} \cdot h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{A} \quad (\text{E6.11})$$

假设由谐波 A_h 造成的幅度测量误差在其误差界内服从均匀分布, 则 A_h 给 A 带来的测量不确定度 $u_A(A_h)$ 由式 (E6.9) 可得: $u_A(A_h) = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{\sqrt{3}}$; 由于三角函数基的正交性, 显然, 不同谐波之间互不相关, 则由所有谐波给 A 带来的测量不确定度:

$$u_2 = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_A^2(A_h)} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} \frac{A_h^2}{3 \cdot (Nh)^{2.5}}}$$

E6.3 测量数据及处理

图 E6.1 是使用某型数据采集系统测量某型信号源获得的正弦信号波形; 其 A/D 位数 $b=12$, 测量范围 $-5\text{V} \sim 5\text{V}$, 采集速率 $v=2\text{kSa/s}$, 采样点数 $n_0=1800$; 信号峰值 4.5V , 频率 11Hz 。则序列所含周波数 $N=9$, $n=1634$ 。经过四参数拟合得:

$A = 4459.388\text{mV}$, $\omega = 0.0049427578\text{rad.}$, $\varphi = 219.544^\circ$, $d = 3.985\text{mV}$, $\rho = 37.00925\text{mV}$, 有效位数 6.29Bits 。

由式 (E6.4) 得交流增益为 $G = A/E = 4.459388/4.5 = 0.990975$

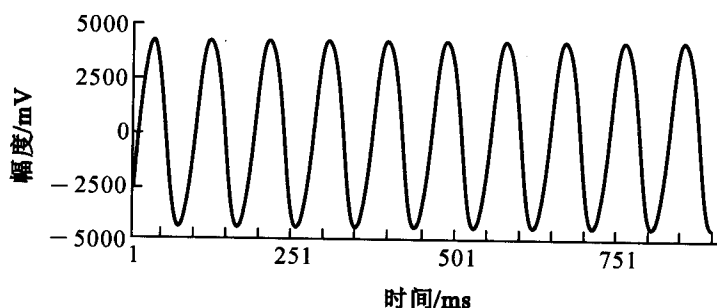


图 E6.1 实测正弦曲线波形

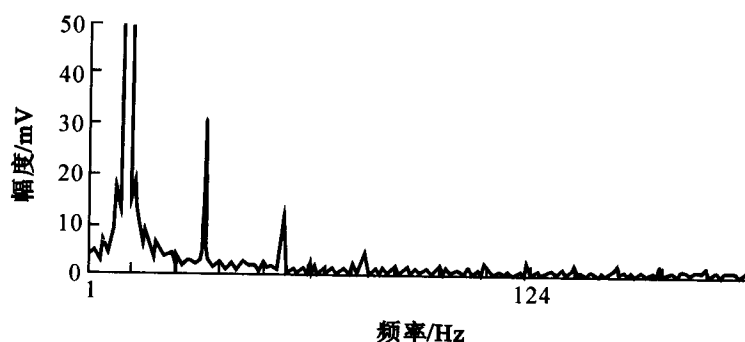


图 E6.2 实测曲线频谱 (幅频特性)

图 E6.2 为其频谱曲线, 为详细观测谐波分量起见, 将幅度刻度调小, 截断了基波的大部分, 从该曲线可见, 测量序列主要的谐波失真为 3、5、7 次谐波, 故不确定度分量 u_2 中仅需计算 2~7 次谐波的影响即可, 各主要谐波分量及其对拟合幅度的不确定度 $u_A(A_h)$ 如表 E6.1。

JJF 1152—2006

表 E6.1 采集序列基波与各主要谐波幅度值

波次	A_h/mV	$\varphi_h/(\circ)$	$u_A(A_h)/mV$
基波	4459.168	219.586	
2次谐波	3.854437	-41.100	0.06000
3次谐波	30.67696	57.008	0.2878
4次谐波	2.679193	-11.830	0.01754
5次谐波	11.48631	-32.000	0.05690
6次谐波	1.8175	27.335	0.007168
7次谐波	4.701	64.409	0.01529

则, $u_2=0.30041mV$, 自由度 $\nu_2 = \infty$; 从采集序列中减去上述已被 u_2 计入的谐波分量后, 重新进行四参数拟合得:

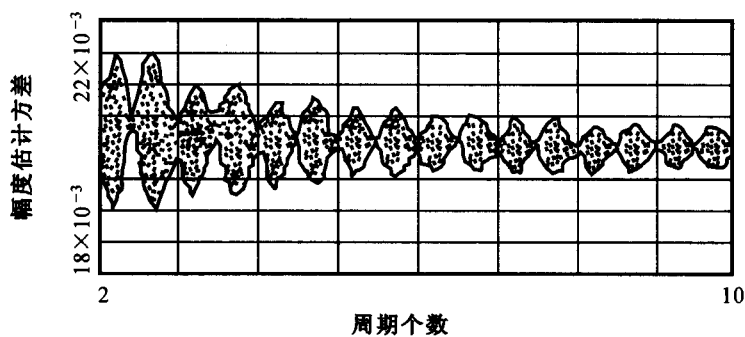
$A = 4459.381mV$, $\omega = 0.004942739rad$, $\varphi = 219.550^\circ$, $d = 3.953mV$, $\rho = 29.479mV$, 有效位数 6.61Bits。

在随机噪声状态下, ρ^2 为噪声方差 (剔除谐波因素后的拟合方差)。正弦波最小二乘拟合四个参数的方差分别为 S_A^2 、 S_ω^2 、 S_φ^2 、 S_d^2 ; 则, $\frac{S_A^2}{\rho^2}$ 、 $\frac{S_\varphi^2 A^2}{\rho^2}$ 、 $\frac{S_d^2}{\rho^2}$ 以及 $\frac{S_\omega^2 A^2}{\omega^2 \rho^2}$ 的描述如图 E6.3, 在 36 个等间距信号初相位上对应的误差界, 随信号周期数变化而变化情况。这里, $n_0 = 100$, 各描述值均与 n 成反比。

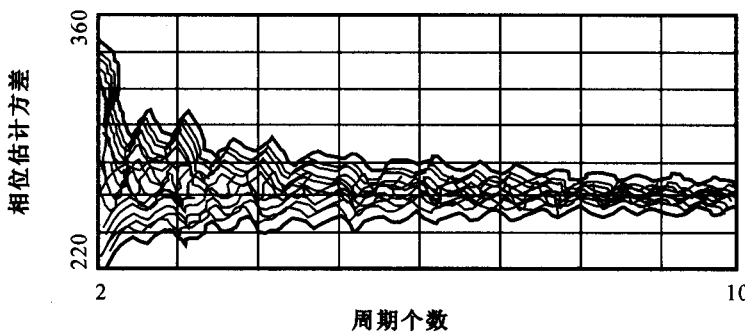
幅度、直流分量和频率的方差表示成比例方差的形式 (如 $\frac{S_A^2}{A^2}$ 、 $\frac{S_d^2}{A^2}$ 和 $\frac{S_\omega^2}{\omega^2}$) 更为实用。这些比例方差可以从图 E6.3 按下述方式确定: ①对比例方差 $\frac{S_A^2}{A^2}$, 从图 E6.3 (a) 中找出归一化 A 方差与周期个数关系的确切位置, 用相应的噪声比例方差 $\frac{\rho^2}{A^2}$ 以及 $100/n$ 连乘即得; ②对于直流分量与相应正弦幅度 A 的比例方差 $\frac{S_d^2}{A^2}$, 从图 E6.3 (c) 中找出归一化 d 方差, 再乘以 $\frac{100\rho^2}{nA^2}$ 可得; ③对于 $\frac{S_\omega^2}{\omega^2}$, 在图 E6.3 (d) 中, 找出相应信号周期数的比例方差, 最后乘以 $\frac{100\rho^2}{nA^2}$ 即可获得; ④初相位的直接方差 S_φ^2 , 可以从图 E6.3 (b) 中的 φ 方差中找到, 用 $\frac{100\rho^2}{nA^2}$ 乘后获得。

由 $N=9$, $n = 1634$, $\rho = 29.479mV$; 从图 E6.3 (a) 中查得: $n_0 = 100$ 点时的幅

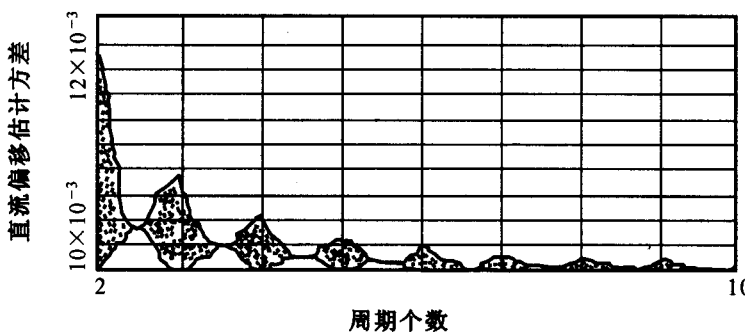
JJF 1152—2006



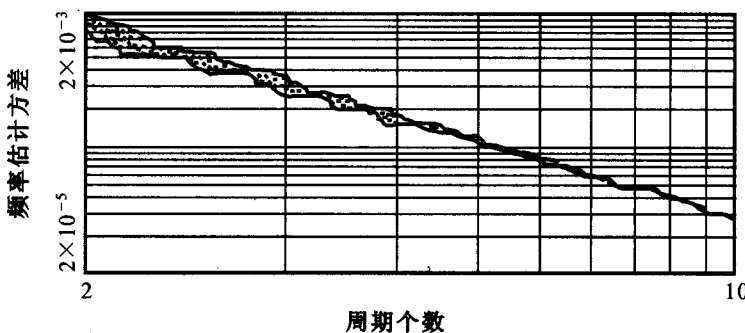
(a) 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2



(b) 相位规范化方差 $S_\phi^2 A^2/\rho^2$



(c) 直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2



(d) 频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$

图 E6.3 在 36 个均匀分布的相位点上, 规范化参数估计方差 (由噪声引起的) 与周期个数的函数关系描述

JJF 1152—2006

度规范化方差 $\sigma_A^2 = S_A^2/\rho^2 = 0.02$, 则 $u_3 = S_A = \sqrt{\frac{\sigma_A^2 \cdot n_0 \cdot \rho^2}{n}} = 1.031\text{mV}$, 其自由度 $\nu_3 = n_0 - 4 = 96$ 。

在实际情况下, 始终存在波形抖动, 它将造成拟合幅度的抖动并产生不确定度。当存在如下几个前提条件: ①抖动的高阶导数项的影响可忽略; ②任何谐波失真都足够小, 以致于它对导数的影响可忽略; ③抖动误差的均值为 0, 尽管这并不严格真实; ④每一采样点的抖动与其他点独立, 则由抖动误差所引起的标准偏差可以估计。

图 E6.4 为图 E6.1 所示波形的幅度抖动测量结果曲线图。从该曲线可得幅度抖动的实验标准偏差 $s_A = 0.4615\text{mV}$; 幅度抖动最大值 $\lambda_A = 1.3188\text{mV}$ 。它是由 $m_0 = 166$ 组值实测获得, 每阻 $N = 9$, $n = 1634$ 。则, $u_4 = s_A = 0.4615\text{mV}$, 其自由度 $\nu_4 = m_0 - 1 = 165$ 。

由信号峰值 4.5V 和说明书得, 正弦信号源幅度误差限为 $\pm 0.0240\%$ 读值 $\pm 400\mu\text{V} = \pm 1.48\text{mV}$; 设信号幅度 E 的误差在该范围内服从均匀分布, 则其不确定度 $u_1 = u(E) = 1.48/\sqrt{3} = 0.85448\text{mV}$, 自由度 $\nu_1 = \infty$ 。

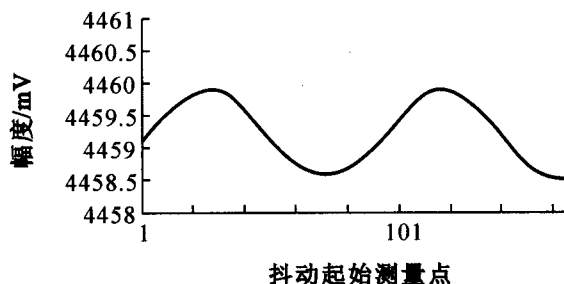


图 E6.4 幅度抖动测量结果

数据处理软件带来的不确定度 u_5 , 由幅度已知的仿真数据使用数据处理软件处理的结果, 当 $n = n_i = 1009$ 时, 按 A 类不确定度评价方法获得如表 E6.2。

表 E6.2 校准软件带来的幅度 E 测量不确定度 u_{5i} ($n = n_i = 1009$)

b (位)	u_{5i}	b (位)	u_{5i}
4	$1.1 \times 10^{-2} E$	11	$1.9 \times 10^{-5} E$
5	$7.7 \times 10^{-4} E$	12	$5.8 \times 10^{-6} E$
6	$1.5 \times 10^{-3} E$	13	$5.3 \times 10^{-6} E$
7	$3.1 \times 10^{-4} E$	14	$2.5 \times 10^{-6} E$
8	$9.2 \times 10^{-5} E$	15	$1.0 \times 10^{-6} E$
9	$9.4 \times 10^{-5} E$	16	$6.8 \times 10^{-7} E$
10	$6.5 \times 10^{-5} E$	17	$2.9 \times 10^{-7} E$

JJF 1152—2006

由于拟合误差与序列长度成反比, A/D 位数 $b = 12$, 故有 $u_5 = u_{5i} \times n_i/n = 5.8 \times 10^{-6} \times 4.5 \times 1009/1634V = 16\mu V$, 其自由度 $\nu_5 = n_i - 4 = 1009 - 4 = 1005$ 。

E6.4 合成标准不确定度计算

交流增益 G 的合成标准不确定度 $u_c(G)$:

$$u_c(G) = \sqrt{\frac{A^2 u_1^2}{E^4} + \frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2}{E^2}} = 3.20 \times 10^{-4}$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(G)$:

$$\nu_{\text{eff}}(G) = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^5 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(G)}{\frac{A^4 u_1^4}{\nu_1 E^8} + \frac{1}{E^4} \cdot \left(\frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4} + \frac{u_5^4}{\nu_5} \right)} = 354.8$$

幅度 A 的合成标准不确定度 $u_c(A)$:

$$u_c(A) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} = 1.17\text{mV}$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(A)$: $\nu_{\text{eff}}(A) = \frac{u_c^4(A)}{\sum_{i=2}^5 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = 155$

E6.5 扩展不确定度

令置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(G) = 354$, 查 t 分布表得包含因子 $k = t_p(\nu_{\text{eff}}(G)) = 1.96$, 则扩展不确定度:

$$U(G) = k \times u_c(G) = 1.96 \times 3.20 \times 10^{-4} = 6.3 \times 10^{-4}$$

令置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(A) = 155$, 查 t 分布表得包含因子 $k = t_p(\nu_{\text{eff}}(A)) = 1.96$, 则扩展不确定度:

$$U(A) = k \times u_c(A) = 1.96 \times 1.17 = 2.3\text{mV}$$

E6.6 测量结果的最终表述

正弦波拟合法获得的交流增益:

$$G_0 = G \pm U(G) = 0.99098 \pm 0.00063, \quad (k = 1.96, p = 95\%)$$

其中, “ \pm ” 后面是扩展不确定度, 其包含因子 $k = 1.96$, 由置信概率 $p = 95\%$ 、有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(G) = 354$, 查 t 分布表获得。

正弦波拟合法获得的正弦波幅度:

$$A_0 = A \pm U(A) = (4459.4 \pm 2.3)\text{mV}, \quad (k = 1.96, p = 95\%)$$

其中, “ \pm ” 后面是扩展不确定度, 其包含因子 $k = 1.96$, 由置信概率 $p = 95\%$ 、有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(A) = 155$, 查 t 分布表获得。

E7 三角波信号波形参数的测量不确定度

E7.1 测量原理

E7.1.1 三角波信号沿线性的最小二乘评价

使用频带足够宽的波形测量设备,对三角波信号源的输出进行测量,获得波形的等间距测量序列 y_j ,对该序列进行预处理,使其含有整数 N 个三角波周期,并且第 1 个测量点为波形的峰值点或谷值点,将采集序列记为 $y_j (j=1, \dots, n)$ 。设所使用的波形测量设备采集速率为 v ,采样间隔为 τ ,对应于 y_j 的采样时刻为 $x_j = (j-1) \cdot \tau$ 。

从采集序列中截取一段“波峰”与相邻的“波谷”之间的测量序列 $y_{0i} (i=1, \dots, m)$,与之对应的采集时刻为 $x_{0i} = (i-1) \cdot \tau + K \cdot \tau, (i=1, \dots, m)$, K 表示截取的序列是从 $j=K+1$ 开始,即 $y_{0i} = y_{K+i}$ 。则该段测量序列是三角波的符合线性规律的曲线沿,其模型规律记为:

$$y = G \cdot x + D \quad (\text{E7.1})$$

则有, G 与 D 的最小二乘估计值为:

$$\begin{aligned} G &= \frac{m \sum_{i=1}^m y_{0i} x_{0i} - \sum_{i=1}^m y_{0i} \cdot \sum_{i=1}^m x_{0i}}{m \sum_{i=1}^m x_{0i}^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_{0i} \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m y_{0i} (K+i-1) - \frac{2K+m-1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i}}{m \cdot (m-1)(m+1)} \cdot \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (\text{E7.2})$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i} - \frac{G}{m} \cdot \sum_{i=1}^m x_{0i} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_{0i} - G\tau \left(K + \frac{m-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{E7.3})$$

可得非线性误差在估计直流增益 G 和直流偏移 D 时,所带来的实验标准偏差 $s_L(G)$ 和 $s_L(D)$,两者的相关系数 $r(G, D)$ 为:

$$s_L^2 = \frac{1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^m [y_{0i} - G \cdot x_{0i} - D]^2 \quad (\text{E7.4})$$

$$s_L^2(G) = \frac{\frac{1}{m} \cdot s_L^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i}^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i} \right)^2} = \frac{\frac{s_L^2}{m}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (\text{E7.5})$$

$$s_L^2(D) = \frac{\frac{s_L^2}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^m x_{0i}^2}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i}^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i} \right)^2} = \frac{\overline{x^2} \cdot \frac{s_L^2}{m}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (\text{E7.6})$$

JJF 1152—2006

$$r(G, D) = -\frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i}}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{0i}^2}} = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} \quad (\text{E7.7})$$

线性度:

$$L_{\max} = \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot x_{0i} - D|}{G \cdot \eta \cdot T} \right\}_{i=1, \dots, m} \quad (\text{E7.8})$$

其中, η 为三角波的对应沿在整周期中所占时间的百分比, 对于上升沿有 $\eta = S$, 对于下降沿有 $\eta = 1 - S$, T 为其周期, S 为波形对称度, 详见下面。

$$L_{\max} \approx \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot x_{0i} - D|}{G \cdot (x_{0m} - x_{01})} \right\}_{i=1, \dots, m} = \max \left\{ \frac{|y_{0i} - G \cdot x_{0i} - D|}{G \cdot (m-1)\tau} \right\}_{i=1, \dots, m}$$

非线性误差:

$$L = \frac{y - G \cdot x - D}{G \cdot (x_m - x_1)} = \frac{y - D}{G\tau \cdot (m-1)} - \frac{x}{x_m - x_1} \quad (\text{E7.9})$$

E7.1.2 三角波幅度参数的最小二乘评价

选取 3 段依次顺序排列的三角波边沿, 按照上述方法分别进行最小二乘直线拟合, 获得 3 个直线方程:

$$y = G_1 \cdot x + D_1 \quad (\text{E7.10})$$

$$y = G_2 \cdot x + D_2 \quad (\text{E7.11})$$

$$y = G_3 \cdot x + D_3 \quad (\text{E7.12})$$

不失一般性, 设 $G_1 > 0$, 描述三角波上升沿, 则 $G_3 > 0$ 也对应上升沿, 而 $G_2 < 0$ 对应三角波的下降沿。理论上所有上升沿的斜率应相等, 所有下降沿的斜率也应相等, 即 $G_1 = G_3$; 实际上应有 $G_1 \approx G_3$ 。

方程 (E7.10) 和 (E7.11) 交点的纵坐标为三角波的峰值 y_{T1} :

$$y_{T1} = \frac{G_2 D_1 - G_1 D_2}{G_2 - G_1} \quad (\text{E7.13})$$

方程 (E7.11) 和 (E7.12) 交点的纵坐标为三角波的谷值 y_{B1} :

$$y_{B1} = \frac{G_3 D_2 - G_2 D_3}{G_3 - G_2} \quad (\text{E7.14})$$

三角波中值 y_{M1} :

$$y_{M1} = \frac{y_{T1} + y_{B1}}{2} \quad (\text{E7.15})$$

三角波幅度值 y_{A1} :

$$y_{A1} = \frac{y_{T1} - y_{B1}}{2} \quad (\text{E7.16})$$

JJF 1152—2006

三角波的对称度可以用上升沿在整个信号周期中所占时间的百分比 S 来表示, 则:

$$S = \frac{G_1^{-1}}{G_1^{-1} - G_2^{-1}} \quad (\text{E7.17})$$

E7.1.3 三角波信号频率的最小二乘评价

设三角波信号周期 $T = 1/f$; 由上述过程获得的 N 个整数周期三角波形序列中, 第 1 个上升沿的模型方程为 (E7.10), 它与时间轴 x 的交点 $x_{c1} = \frac{-D_1}{G_1}$; 第 N 个上升沿的模型方程为:

$$y = G_N \cdot x + D_N \quad (\text{E7.18})$$

它与时间轴 x 的交点 $x_{cN} = \frac{-D_N}{G_N}$; 则 x_{c1} 与 x_{cN} 之间包含 $N-1$ 个信号周期, 有,

$$T = \frac{1}{N-1} \cdot \left(\frac{D_1}{G_1} - \frac{D_N}{G_N} \right) \quad (\text{E7.19})$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{E7.20})$$

E7.2 测量不确定度模型

E7.2.1 三角波线性度

由式 (E7.9) 可得, 三角波线性度评价误差:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial L}{\partial G} \cdot \Delta G + \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial L}{\partial D} \cdot \Delta D \\ &= \frac{\Delta y}{G(x_m - x_1)} - \frac{(y - D)\Delta G}{G^2(x_m - x_1)} - \frac{\Delta x}{(x_m - x_1)} - \frac{\Delta D}{G(x_m - x_1)} \\ &= C_L(y) \cdot \Delta y + C_L(G) \cdot \Delta G + C_L(x) \cdot \Delta x + C_L(D) \cdot \Delta D \end{aligned} \quad (\text{E7.21})$$

可见, 线性度 L 的测量不确定度 $u(L)$ 的主要来源有:

- 测量仪器幅度测量不确定度 $u(y)$;
- 测量仪器时基或采样间隔不确定度 $u(x)$;
- 三角波沿斜率测量不确定度 $u(G)$;
- 三角波沿截距测量不确定度 $u(D)$;

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \quad (\text{E7.22})$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \quad (\text{E7.23})$$

式中: x_i 为输入 X_i 的测量值; x_j 为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

JJF 1152—2006

$u(x_i)$ 为 x_i 的标准不确定度； $u(x_j)$ 为 x_j 的标准不确定度，($i \neq j$)；

$u(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的协方差估计值，($i \neq j$)；

$r(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值，($i \neq j$)；

本测量过程中，对于相关系数的估计值，当 $i \neq j$ 时，显然有：

$r(x_i, x_j) = 0$ ；不同的输入值之间可认为是不相关；

$r(y_i, y_j) = 0$ ；不同的测量值之间可认为是不相关；

$r(x_i, y_j) = 0$ ，关于测量值与输入值之间的误差，可以忽略其相关性；

$r(x_i, G) = 0$ ，忽略波形斜率与输入值之间误差的相关性；

$r(x_i, D) = 0$ ，忽略波形截距与输入值之间误差的相关性。

波形斜率 G 的不确定度 $u_G = s_L(G)$ ，波形截距 D 的不确定度 $u_D = s_L(D)$ 。

$r(G, D)$ 由式 (E7.7) 给出。线性度 L 的不确定度：

$$u(L) = \sqrt{c_L^2(y)u_y^2 + c_L^2(G)u_G^2 + c_L^2(x)u_x^2 + c_L^2(D)u_D^2 + 2c_L(G)c_L(D)r(G,D)u_Gu_D} \quad (\text{E7.24})$$

E7.2.2 三角波幅度参数

由式 (E7.13) 可得三角波的峰值评价误差 Δy_{T1} ：

$$\begin{aligned} \Delta y_{T1} &= \frac{\partial y_{T1}}{\partial G_1} \Delta G_1 + \frac{\partial y_{T1}}{\partial G_2} \Delta G_2 + \frac{\partial y_{T1}}{\partial D_1} \Delta D_1 + \frac{\partial y_{T1}}{\partial D_2} \Delta D_2 \\ &= \frac{G_2(D_1 - D_2)}{(G_2 - G_1)^2} \Delta G_1 + \frac{G_1(D_2 - D_1)}{(G_2 - G_1)^2} \Delta G_2 + \frac{G_2}{G_2 - G_1} \Delta D_1 - \frac{G_1}{G_2 - G_1} \Delta D_2 \\ &= C_T(G_1) \Delta G_1 + C_T(G_2) \Delta G_2 + C_T(D_1) \Delta D_1 + C_T(D_2) \Delta D_2 \end{aligned}$$

由式 (E7.14) 可得三角波的谷值评价误差 Δy_{B1} ：

$$\begin{aligned} \Delta y_{B1} &= \frac{G_2(D_3 - D_2)}{(G_2 - G_3)^2} \Delta G_3 + \frac{G_3(D_2 - D_3)}{(G_2 - G_3)^2} \Delta G_2 + \frac{G_2}{G_2 - G_3} \Delta D_3 - \frac{G_3}{G_2 - G_3} \Delta D_2 \\ &= C_B(G_3) \Delta G_3 + C_B(G_2) \Delta G_2 + C_B(D_3) \Delta D_3 + C_B(D_2) \Delta D_2 \end{aligned}$$

由式 (E7.16) 可得三角波幅度值评价误差 Δy_{A1} ：

$$\begin{aligned} \Delta y_{A1} &= \frac{\partial y_{A1}}{\partial G_1} \Delta G_1 + \frac{\partial y_{A1}}{\partial G_2} \Delta G_2 + \frac{\partial y_{A1}}{\partial G_3} \Delta G_3 + \frac{\partial y_{A1}}{\partial D_1} \Delta D_1 + \frac{\partial y_{A1}}{\partial D_2} \Delta D_2 + \frac{\partial y_{A1}}{\partial D_3} \Delta D_3 \\ &= \frac{G_2(D_1 - D_2)}{2(G_2 - G_1)^2} \Delta G_1 - \left(\frac{G_1(D_1 - D_2)}{2(G_2 - G_1)^2} - \frac{G_3(D_3 - D_2)}{2(G_2 - G_3)^2} \right) \Delta G_2 - \frac{G_2(D_3 - D_2)}{2(G_2 - G_3)^2} \Delta G_3 \\ &\quad + \frac{G_2}{2(G_2 - G_1)} \Delta D_1 + \left(\frac{-G_1}{2(G_2 - G_1)} + \frac{G_3}{2(G_2 - G_3)} \right) \Delta D_2 - \frac{G_2}{2(G_2 - G_3)} \Delta D_3 \\ &= C_B(G_1) \Delta G_1 + C_B(G_2) \Delta G_2 + C_B(G_3) \Delta G_3 + C_B(D_1) \Delta D_1 + C_B(D_2) \Delta D_2 + C_B(D_3) \Delta D_3 \end{aligned}$$

可见，a) 三角波峰值测量不确定度的来源主要是计算它的两条直线的斜率和截距

的不确定度。b) 三角波谷值测量不确定度的来源主要是计算它的两条直线的斜率和截距的不确定度。c) 三角波幅度值测量不确定度的来源主要是计算它的四条直线的斜率和截距的不确定度。

由式 (E7.22), 本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 当 $i \neq j$ 时, 显然有:

$r(G_i, G_j) = 0$, 不同直线的斜率可认为是不相关;

$r(D_i, D_j) = 0$, 不同直线的截距可认为是不相关;

$r(G_i, D_j) = 0$, 不同直线的斜率与截距可认为是不相关。

直线斜率 G_i 的不确定度 $u_{G_i} = s_L(G_i)$, 波形截距 D_i 的不确定度 $u_{D_i} = s_L(D_i)$,

$r(G_i, D_i)$ 由式 (E7.7) 给出。则,

三角波峰值测量不确定度:

$$u_c(y_{T1}) = [c_T^2(G_1)u_{G1}^2 + c_T^2(G_2)u_{G2}^2 + c_T^2(D_1)u_{D1}^2 + c_T^2(D_2)u_{D2}^2 + 2c_T(G_1)c_T(D_1)r(G_1, D_1)u_{G1}u_{D1} + 2c_T(G_2)c_T(D_2)r(G_2, D_2)u_{G2}u_{D2}]^{1/2} \quad (\text{E7.25})$$

三角波谷值测量不确定度:

$$u_c(y_{B1}) = [c_B^2(G_2)u_{G2}^2 + c_B^2(G_3)u_{G3}^2 + c_B^2(D_2)u_{D2}^2 + c_B^2(D_3)u_{D3}^2 + 2c_B(G_2)c_B(D_2)r(G_2, D_2)u_{G2}u_{D2} + 2c_B(G_3)c_B(D_3)r(G_3, D_3)u_{G3}u_{D3}]^{1/2} \quad (\text{E7.26})$$

三角波幅度值测量不确定度:

$$u_c(y_{A1}) = [c_A^2(G_1)u_{G1}^2 + c_A^2(G_2)u_{G2}^2 + c_A^2(G_3)u_{G3}^2 + c_A^2(D_1)u_{D1}^2 + c_A^2(D_2)u_{D2}^2 + c_A^2(D_3)u_{D3}^2 + 2c_A(G_1)c_A(D_1)r(G_1, D_1)u_{G1}u_{D1} + 2c_A(G_2)c_A(D_2)r(G_2, D_2)u_{G2}u_{D2} + 2c_A(G_3)c_A(D_3)r(G_3, D_3)u_{G3}u_{D3}]^{1/2} \quad (\text{E7.27})$$

E7.2.3 三角波信号频率

由式 (E7.20) 可得三角波频率值评价误差 Δf :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial G_1} \Delta G_1 + \frac{\partial f}{\partial G_N} \Delta G_N + \frac{\partial f}{\partial D_1} \Delta D_1 + \frac{\partial f}{\partial D_N} \Delta D_N \\ &= \frac{N-1}{(D_1/G_1 - D_N/G_N)^2} \left(\frac{D_1}{G_1^2} \Delta G_1 - \frac{D_N}{G_N^2} \Delta G_N - \frac{\Delta D_1}{G_1} + \frac{\Delta D_N}{G_N} \right) \\ &= C_f(G_1) \Delta G_1 + C_f(G_N) \Delta G_N + C_f(D_1) \Delta D_1 + C_f(D_N) \Delta D_N \end{aligned}$$

可见, 三角波频率测量不确定度的来源主要是计算它的两条直线的斜率和截距的不确定度。

由式 (E7.22), 本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 显然有:

$r(G_1, G_N) = 0$, 不同直线的斜率可认为是不相关;

JJF 1152—2006

$r(D_1, D_N) = 0$, 不同直线的截距可认为是不相关;

$r(G_1, D_N) = r(G_N, D_1) = 0$, 不同直线的斜率与截距可认为是不相关;

直线斜率 G_i 的不确定度 $u_{G_i} = s_L(G_i)$, 波形截距 D_i 的不确定度 $u_{D_i} = s_L(D_i)$ 。

$r(G_i, D_i)$ 由式 (E7.7) 给出。则,

三角波频率测量不确定度:

$$u_c(f) = [c_f^2(G_1)u_{G_1}^2 + c_f^2(G_N)u_{G_N}^2 + c_f^2(D_1)u_{D_1}^2 + c_f^2(D_N)u_{D_N}^2 + 2c_f(G_1)c_f(D_1)r(G_1, D_1)u_{G_1}u_{D_1} + 2c_f(G_N)c_f(D_N)r(G_N, D_N)u_{G_N}u_{D_N}]^{1/2} \quad (\text{E7.28})$$

E7.3 测量数据及处理

使用数字存储示波器对三角波信号源进行波形测量, 其信号频率为 $f_0 = 10\text{kHz}$, 幅度 $A_0 = 4\text{V}$; 数字存储示波器量程设置为 10V (1V/div), 采集速率为 50MSa/s , 采样间隔 $\tau = 20\text{ns}$, 时间测量误差限 $\Delta x/x = 2.5 \times 10^{-5}$; 存储深度为 500000 , 通道工作在平均值测量方式, 平均数为 100 , 即每一个测量数据为 100 个测量点平均的结果, 以减少噪声对线性度评价结果的影响, 幅度测量误差限 $\Delta y = 1\% \times \text{量程}$ 。图 E7.1 为测量波形的一部分。

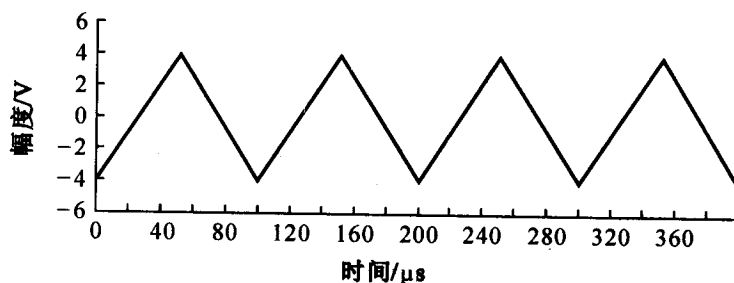


图 E7.1 三角波波形测量值曲线

三角波沿长度约为 2500 , 两端各截去 5% 后作直线拟合, 则 $m = 2250$ 。使用上述方法进行三角波波形参数评价, 获得如下结果:

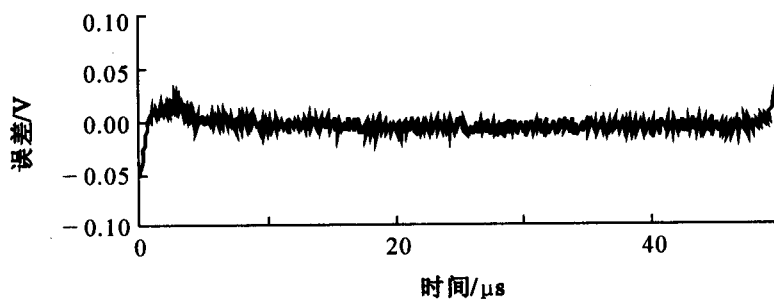
三角波峰值测量结果为: $y_{T1} = 3.97858\text{V}$

三角波谷值测量结果为: $y_{B1} = -4.03357\text{V}$

波形的第 1 个上升沿方程为:

$$y = f_1(x) = G_1 \cdot x + D_1 = 160241.0x - 16.1685 \quad (\text{E7.29})$$

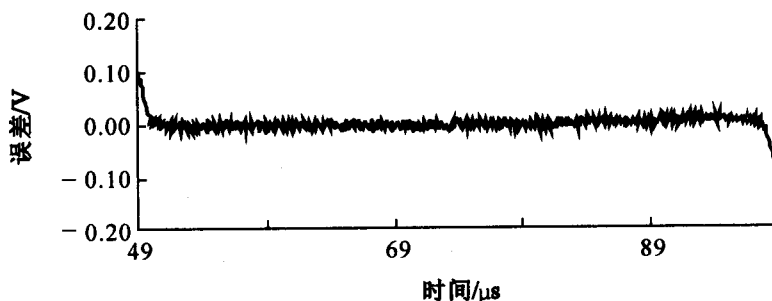
最大非线性误差为 $\max\{|f_1(x) - G_1 \cdot x - D_1|\} = 0.132579\text{V}$, 其模型回归值与测量值之间的误差见图 E7.2。按式 (E7.4) ~ 式 (E7.7) 得: $s_{L1} = 0.034879$, $s_L(G_1) = 0.000302061$, $s_L(D_1) = 0.000739663$, $r(G_1, D_1) = -0.0131474$, G_1 与 D_1 的自由度 $\nu_{G_1} = \nu_{D_1} = m - (\text{独立变量个数}) = m - 2 = 2222$ 。

图 E7.2 三角波上升沿直线模型回归值 $f_1(x)$ 与测量值 y 之差 $f_1(x) - y$

波形的第 1 个下降沿方程为:

$$y = f_2(x) = G_2 \cdot x + D_2 = -160189.6x + 24.1192 \quad (\text{E7.30})$$

最大非线性误差为 $\max\{|f_2(x) - G_2 \cdot x - D_2|\} = 0.114111\text{V}$, 其模型回归值与测量值之间的误差见图 E7.3。 $s_{L2} = 0.0346274$, $s_L(G_2) = 0.000299893$, $s_L(D_2) = 0.00073747$, $r(G_2, D_2) = -0.0115301$, $\nu_{G2} = \nu_{D2} = 2203$ 。

图 E7.3 三角波下降沿直线模型回归值 $f_2(x)$ 与测量值 y 之差 $f_2(x) - y$

波形的第 2 个上升沿方程为:

$$y = f_3(x) = G_3 \cdot x + D_3 = 160325.9x - 32.2103 \quad (\text{E7.31})$$

最大非线性误差为 $\max\{|f_3(x) - G_3 \cdot x - D_3|\} = 0.178626\text{V}$;

$$s_{L3} = 0.0340725,$$

$$s_L(G_3) = 0.000295103,$$

$$s_L(D_3) = 0.000722076,$$

$$r(G_3, D_3) = -0.0134846,$$

$$\nu_{G3} = \nu_{D3} = 2225.$$

波形的第 99 个上升沿方程为:

$$y = f_{99}(x) = G_{99} \cdot x + D_{99} = 160276.8x - 1586.88 \quad (\text{E7.32})$$

最大非线性误差为: $\max\{|f_{99}(x) - G_{99} \cdot x - D_{99}|\} = 0.137195\text{V}$;

$$s_{L99} = 0.0348402,$$

$$s_L(G_{99}) = 0.000301642,$$

JJF 1152—2006

$$s_L(D_{99}) = 0.000737848,$$

$$r(G_{99}, D_{99}) = -0.013302,$$

$$\nu_{G_{99}} = \nu_{D_{99}} = 2228。$$

从图 E7.2 和 E7.3 可见, 无论是上升沿还是下降沿, 在三角波峰值附近, 其波形失真误差最大, 非线性特征明显, 并且实际的峰值均比理论值小; 而远离峰值的地方, 波形线性较好, 失真误差较小。因此, 在计算三角波沿线性度及回归曲线时, 舍去靠近峰值附近的波形测量点(可据情况舍去 5%~10%)可获得较好效果。

由式 (E7.19) 可得:

三角波周期:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{(N-1)} \left(\frac{D_1}{G_1} - \frac{D_N}{G_N} \right) = \frac{1}{98} \cdot \left(\frac{D_1}{G_1} - \frac{D_{99}}{G_{99}} \right) = \frac{1}{98} \cdot \left(\frac{-16.1685}{160241.0} - \frac{-1586.88}{160276.8} \right) \\ &= 9.999970 \times 10^{-5} (\text{s}) \end{aligned}$$

三角波频率: $f = \frac{1}{T} = 10000.030 \text{Hz},$

频率误差: $\frac{f_0 - f}{f} = \frac{10000 - 10000.030}{10000.030} = -3.0 \times 10^{-6}$

三角波的对称度:

$$S = \frac{G_1^{-1}}{G_1^{-1} - G_2^{-1}} = \frac{G_2}{G_2 - G_1} = \frac{-160189.6}{-160189.6 - 160241.0} = 0.499920$$

对于三角波, 其标称对称度为 $S_0 = 0.5$, 所以其对称度误差:

$$\frac{S_0 - S}{S} = \frac{0.5 - 0.499920}{0.499920} = 1.6 \times 10^{-4}$$

第 1 个上升沿的线性度:

$$L_{1\max} = \max \left\{ \frac{|y_{1i} - G \cdot x_{1i} - D|}{G \cdot S \cdot T} \right\}_{i=1, \dots, m} = 0.013$$

第 2 个上升沿的线性度: $L_{3\max} = 0.018$

第 99 个上升沿的线性度: $L_{99\max} = 0.014$

第 1 个下降沿的线性度:

$$L_{2\max} = \max \left\{ \frac{|y_{1i} - G \cdot x_{1i} - D|}{G \cdot (1 - S) \cdot T} \right\}_{i=1, \dots, m} = 0.011$$

三角波峰值: $y_{T1} = \frac{G_2 D_1 - G_1 D_2}{G_2 - G_1}$

$$= \frac{-160189.6 \times (-16.1685) - 160241.0 \times 24.1192}{-160189.6 - 160241.0}$$

$$= 3.97858 \text{V}$$

JJF 1152—2006

$$\begin{aligned} \text{三角波谷值: } y_{B1} &= \frac{G_3 D_2 - G_2 D_3}{G_3 - G_2} \\ &= \frac{160325.9 \times 24.1192 - (-160189.6) \times (-32.2103)}{160325.9 - (-160189.6)} \\ &= -4.03357\text{V} \end{aligned}$$

$$\text{三角波中值: } y_{M1} = \frac{y_{T1} + y_{B1}}{2} = -0.02750\text{V}$$

$$\text{三角波幅度值: } y_{A1} = \frac{y_{T1} - y_{B1}}{2} = 4.0061\text{V}$$

$$\text{幅度误差: } \frac{A_0 - y_{A1}}{y_{A1}} = \frac{4 - 4.0061}{4.0061} = -1.5 \times 10^{-3}$$

E7.4 合成标准不确定度计算

E7.4.1 三角波线性度

设示波器的时间测量误差在 $[-\Delta x, \Delta x]$ 内服从均匀分布, 时间测量不确定度 $u_x = \Delta x/\sqrt{3} = 1.44 \times 10^{-5} x$, 其自由度 $\nu_x = \infty$ 。

设示波器的幅度测量误差在 $[-\Delta y, \Delta y]$ 内服从均匀分布, 幅度测量不确定度 $u_y = \Delta y/\sqrt{3} = 0.577\% \times \text{量程} = 57.7\text{mV}$, 其自由度 $\nu_x = \infty$ 。 $u_G = s_L(G_1) = 0.000302061$; $u_D = s_L(D_1) = 0.000739663$;

按式 (E7.24) 可得三角波线性度合成标准不确定度: $u_c(L) = 0.00810097$ 。

E7.4.2 三角波幅度参数

$$\text{由 } u_{G1} = s_L(G_1) = 0.000302061;$$

$$u_{D1} = s_L(D_1) = 0.000739663;$$

$$u_{G2} = s_L(D_2) = 0.000299893;$$

$$u_{D2} = s_L(D_2) = 0.00073747;$$

$$u_{G3} = s_L(G_3) = 0.000295103;$$

$$u_{D3} = s_L(D_3) = 0.000722076。$$

按式 (E7.25) 可得三角波峰值合成标准不确定度:

$$u_c(y_{T1}) = 0.00118853$$

按式 (E7.26) 和式 (E7.27) 可得三角波谷值合成标准不确定度:

$$u_c(y_{B1}) = 0.000519634$$

三角波幅值合成标准不确定度:

$$u_c(y_{A1}) = 0.000594974$$

E7.4.3 三角波信号频率

JJF 1152—2006

$$u_{G99} = s_L(G_{99}) = 0.000301642$$

$$u_{D99} = s_L(D_{99}) = 0.000737848$$

按式 (E7.28) 可得三角波频率合成标准不确定度: $u_c(f) = 0.0242717$ 。

E7.5 扩展不确定度

E7.5.1 三角波线性度

对于第 1 个上升沿, 三角波线性度的有效自由度为:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}}(L) &= \frac{u_c^4(L)}{\sum_{i=1}^4 \frac{c_i^4(L) u_i^4(L)}{\nu_i(L)}} \\ &= \frac{u_c^4(L)}{\frac{c_L^4(G) u_G^4}{\nu_G} + \frac{c_L^4(D) u_D^4}{\nu_D} + \frac{c_L^4(x) u_x^4}{\nu_x} + \frac{c_L^4(y) u_y^4}{\nu_y}} \\ &= 8.2511 \times 10^{10} \end{aligned}$$

选取置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(L) = 8.2511 \times 10^{10}$, 经 t 分布表查得包含因子 $k = 1.960$, 则可得三角波线性度的扩展不确定度:

$$U(L) = k \cdot u_c(L) = 1.96 \times 0.00810097 = 0.016$$

同理, 可得其他沿线性的扩展不确定度。

E7.5.2 三角波幅度参数

三角波峰值的有效自由度:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}}(y_{T1}) &= \frac{u_c^4(y_{T1})}{\sum_{i=1}^4 \frac{c_i^4(y_{T1}) u_i^4(y_{T1})}{\nu_i(y_{T1})}} \\ &= \frac{u_c^4(y_{T1})}{\frac{c_T^4(G_1) u_{G1}^4}{\nu_{G1}} + \frac{c_T^4(D_1) u_{D1}^4}{\nu_{D1}} + \frac{c_T^4(G_2) u_{G2}^4}{\nu_{G2}} + \frac{c_T^4(D_2) u_{D2}^4}{\nu_{D2}}} \\ &= 1399.39 \end{aligned}$$

选取置信概率 $p = 95\%$, 由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{T1}) = 1399$, 经 t 分布表查得包含因子 $k_{95} = 1.960$, 则可得三角波峰值的扩展不确定度:

$$U(y_{T1}) = k \cdot u_c(y_{T1}) = 1.96 \times 0.00118853 = 0.0023$$

三角波谷值的有效自由度:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}}(y_{B1}) &= \frac{u_c^4(y_{B1})}{\sum_{i=1}^4 \frac{c_i^4(y_{B1}) u_i^4(y_{B1})}{\nu_i(y_{B1})}} \\ &= \frac{u_c^4(y_{B1})}{\frac{c_B^4(G_2) u_{G2}^4}{\nu_{G2}} + \frac{c_B^4(D_2) u_{D2}^4}{\nu_{D2}} + \frac{c_B^4(G_3) u_{G3}^4}{\nu_{G3}} + \frac{c_B^4(D_3) u_{D3}^4}{\nu_{D3}}} \end{aligned}$$

JJF 1152—2006

$$= 4450.15$$

选取置信概率 $p=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{B1})=4450$ ，经 t 分布表查得包含因子 $k_{95}=1.960$ ，则可得三角波谷值的扩展不确定度：

$$U(y_{B1}) = k \cdot u_c(y_{B1}) = 1.96 \times 0.000519634 = 0.0010$$

同理，三角波幅值的有效自由度：

$$\nu_{\text{eff}}(y_{A1}) = \frac{u_c^4(y_{A1})}{\sum_{i=1}^6 \frac{c_i^4(y_{A1}) u_i^4(y_{A1})}{\nu_i(y_{A1})}} = 1405.65$$

选取置信概率 $p=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{B1})=1405$ ，经 t 分布表查得包含因子 $k_{95}=1.960$ ，则可得三角波幅值的扩展不确定度：

$$U(y_{A1}) = k \cdot u_c(y_{A1}) = 1.96 \times 0.000594974 = 0.0012$$

E7.5.3 三角波信号频率

三角波频率的有效自由度：

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}}(f) &= \frac{u_c^4(f)}{\sum_{i=1}^4 \frac{c_i^4(f) u_i^4(f)}{\nu_i(f)}} \\ &= \frac{u_c^4(f)}{\frac{c_f^4(G_1) u_{G1}^4}{\nu_{G1}} + \frac{c_f^4(D_1) u_{D1}^4}{\nu_{D1}} + \frac{c_f^4(G_N) u_{GN}^4}{\nu_{GN}} + \frac{c_f^4(D_N) u_{DN}^4}{\nu_{DN}}} \\ &= 1958.14 \end{aligned}$$

选取置信概率 $p=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(f)=1958$ ，经 t 分布表查得包含因子 $k_{95}=1.960$ ，则可得三角波频率的扩展不确定度：

$$U(f) = k \cdot u_c(f) = 1.96 \times 0.0242717 = 0.048$$

E7.6 测量结果的最终表述

三角波线性度测量结果：

$$L_0 = L \pm U(L) = 0.013 \pm 0.016$$

其中， \pm 的后面是扩展不确定度 $U(L)$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(L)=8.2511 \times 10^{10}$ ，置信概率 $p=95\%$ 条件下，由 t 分布表查得。

三角波峰值测量结果：

$$y_T = y_{T1} \pm U(y_{T1}) = (3.9786 \pm 0.0023) \text{V}$$

其中， \pm 的后面是扩展不确定度 $U(y_{T1})$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{T1})=1399$ ，置信概率 $p=95\%$ 条件下，由 t 分布表查得。

三角波谷值测量结果：

JJF 1152—2006

$$y_B = y_{B1} \pm U(y_{B1}) = (-4.0336 \pm 0.0010)V$$

其中，±的后面是扩展不确定度 $U(y_{B1})$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{B1})=4450$ ，置信概率 $p=95\%$ 条件下，由 t 分布表查得。

三角波幅值测量结果：

$$y_A = y_{A1} \pm U(y_{A1}) = (4.0061 \pm 0.0012)V$$

其中，±的后面是扩展不确定度 $U(y_{A1})$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(y_{A1})=1405$ ，置信概率 $p=95\%$ 条件下，由 t 分布表查得。

三角波频率测量结果：

$$f_0 = f \pm U(f) = (10000.030 \pm 0.048)\text{Hz}$$

其中，±的后面是扩展不确定度 $U(f)$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(f)=1958$ ，置信概率 $p=95\%$ 条件下，由 t 分布表查得。