JJF

中华人民共和国国家计量技术规范

JJF1059—1999

测量不确定度评定与表示

Evaluation and Expression of Uncertainty in Measurement

1999－01－11发布　　1999－05－01实施

国家质量技术监督局 发布

测量不确定度评定与表示

Evaluation and Expression

of Uncertainty in Measurement

JJF1059—1999
代替《JJF1027—1991 测量误差及数据处理》中的测量误差部分

本规范经国家质量技术监督局于1999年01月11日批准，并自1999年05月01日起施行。

归口单位：全国法制计量技术委员会

起草单位：中国计量科学研究院

本规范由全国法制计量技术委员会解释

本规范起草人：

李慎安

施昌彦（中国计量科学研究院）

刘　风（中国计量科学研究院）

目　录

1　范围 …………………………………………………………… (1)

2　基本术语及其概念 ………………………………………… (2)

3　产生测量不确定度的原因和测量模型化 ………………… (7)

4　标准不确定度的A类评定 ………………………………… (10)

5　标准不确定度的B类评定 ………………………………… (12)

6　合成标准不确定度的评定 ………………………………… (15)

7　扩展不确定度的评定 ……………………………………… (20)

8　测量不确定度的报告与表示 ……………………………… (21)

附录A　t 分布在不同置信概率 p 与自由度 ν 的 $t_p(\nu)$ 值(t 值) ………… (24)

附录B　概率分布情况的估计 ……………………………… (26)

附录C　有关量的符号汇总 ………………………………… (28)

附录D　术语的英汉对照 …………………………………… (32)

测量不确定度评定与表示

一切测量结果都不可避免地具有不确定度。《测量不确定度表示指南》(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement 以下简称 GUM),由国际标准化组织(ISO)计量技术顾问组第三工作组(ISO/TAG4/WG3)起草,于 1993 年以 7 个国际组织的名义联合发布,这 7 个国际组织是国际标准化组织(ISO)、国际电工委员会(IEC)、国际计量局(BIPM)、国际法制计量组织(OIML)、国际理论化学与应用化学联合会(IUPAC)、国际理论物理与应用物理联合会(IUPAP)、国际临床化学联合会(IFCC)。GUM 采用当前国际通行的观点和方法,使涉及测量的技术领域和部门,可以用统一的准则对测量结果及其质量进行评定、表示和比较。在我国实施 GUM,不仅是不同学科之间交往的需要,也是全球市场经济发展的需要。本规范给出的测量不确定度评定与表示的方法从易于理解、便于操作、利于过渡出发,原则上等同采用 GUM 的基本内容,对科学研究、工程技术及商贸中大量存在的测量结果的处理和表示,均具有适用性。本规范的目的是:

——提出如何以完整的信息评定与表示测量不确定度;

——提供对测量结果进行比较的基础。

评定与表示测量不确定度的方法满足以下要求:

a)适用于各种测量和测量中所用到的各种输入数据,即具有普遍适用性。

b)在本方法中表示不确定度的量应该:

——能从对不确定度有贡献的分量导出,且与这些分量怎样分组无关,也与这些分量如何进一步分解为下一级分量无关,即它们是内部协调一致的;

——当一个测量结果用于下一个测量时,其不确定度可作为下一个测量结果不确定度的分量,即它们是可传播的。

c)在诸如工业、商业及与健康或安全有关的某些领域中,往往要求提供较高概率的置信区间,本方法应能方便地给出这样的区间及相应的置信概率。

本规范给出了常见情况下,评定与表示测量不确定度的原则、方法和简要步骤,其中的举例,旨在对原则和方法作详细说明,以便于进一步理解和有助于实际应用。附录中所用的基本符号,取自 GUM 及有关的 ISO、IEC 标准。

1 范围

1.1 本规范所规定的测量中评定与表示不确定度的通用规则,适用于各种准确度等级的测量领域,例如:

a)建立国家计量基准、计量标准及其国际比对;

b)标准物质、标准参考数据;

c)测量方法、检定规程、检定系统、校准规范等;

d)科学研究及工程领域的测量;

e)计量认证、计量确认、质量认证以及实验室认可;

f）测量仪器的校准和检定；

g）生产过程的质量保证以及产品的检验和测试；

h）贸易结算、医疗卫生、安全防护、环境监测及资源测量。

1.2 本规范主要涉及有明确定义的，并可用唯一值表征的被测量估计值的不确定度。至于被测量呈现为一系列值的分布或取决于一个或多个参量（例如，以时间为参变量），则对被测量的描述是一组量，应给出其分布情况及其相互关系。

2 基本术语及其概念

本规范中所使用的术语及其定义与《JJF1001—1998 通用计量术语及定义》一致，但其中楷体字的内容为本规范所增加。

2.1 ［可测量的］* 量 ［measurable］quantity

现象、物体或物质可定性区别和定量确定的属性。

注：

1 术语“量”可指一般意义的量或特定量。一般意义的量如长度、时间、质量、温度、电阻、物质的量浓度；特定量如某根棒的长度，某根导线的电阻，某份酒样中乙醇的浓度。

2 可相互比较并按大小排序的量称为同种量。若干同种量合在一起可称之为同类量，如功、热、能；厚度、周长、波长。

3 量的符号参照《GB3100～3102—1993 量和单位》。

2.2 量值 value of a quantity

一般由一个数乘以测量单位所表示的特定量的大小。

例：5.34 m 或 534 cm，15 kg，10 s，－40 ℃。

注：对于不能由一个数乘以测量单位所表示的量，可参照约定参考标尺，或参照测量程序，或两者都参照的方式表示。

2.3 ［量的］真值 true value ［of a quantity］

与给定的特定量定义一致的值。

注：

1 量的真值只有通过完善的测量才有可能获得。

2 真值按其本性是不确定的。

3 与给定的特定量定义一致的值不一定只有一个。

4 GUM 用“被测量之值”代替“真值”。在不致引起混淆时，推荐这一用法。

2.4 ［量的］约定真值 conventional true value ［of a quantity］

对于给定目的具有适当不确定度的、赋予特定量的值，有时该值是约定采用的。

例：a）在给定地点，取由参考标准复现而赋予该量的值作为约定真值。

b）常数委员会（CODATA）1986 年推荐的阿伏加德罗常数值 $6.022\,136\,7\times10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$。

注：

1 约定真值有时称为指定值、最佳估计值、约定值或参考值。参考值在这种意义上使用不应与

* 方括号［ ］中的字一般可省略，下同。

参考条件中的参考值混淆。

2　常用某量的多次测量结果来确定约定真值。

2.5　被测量　measurand

作为测量对象的特定量。

例：给定的水样品在20℃时的蒸汽压力。

注：

1　对被测量的详细描述，可要求包括对其他有关量（如时间、温度和压力）作出说明。

2　实践中，被测量应根据所需准确度予以完整定义，以便对所有的测量，其值是单一的。例如：一根标称值为1 m长的钢棒其长度需测至微米级准确度，其技术说明应包括给定温度和压力。但若只需毫米级准确度，则无需规定温度、压力和其他影响量的值。

2.6　测量结果　result of a measurement

由测量所得到的赋予被测量的值。

注：

1　在给出测量结果时，应说明它是示值、未修正测量结果或已修正测量结果，还应表明它是否为若干个值的平均值。

2　在测量结果的完整表述中，应包括测量不确定度，必要时还应说明有关影响量的取值范围。

3　测量结果仅是被测量之值的估计。

4　很多情况下，测量结果是在重复观测的情况下确定的。

5　在测量结果的完整表述中，还应给出自由度。

2.7　测量准确度　accuracy of measurement

测量结果与被测量的真值之间的一致程度。

注：

1　不要用术语“精密度”代替“准确度”。

2　准确度是一个定性概念。例如：可以说准确度高低、准确度为0.25级、准确度为3等及准确度符合××标准；尽量不使用如下表示：准确度为0.25%、16 mg、≤16 mg及±16 mg。

2.8　［测量结果的］重复性　repeatability［of results of measurements］

在相同测量条件下，对同一被测量进行连续多次测量所得结果之间的一致性。

注：

1　这些条件称为“重复性条件”。

2　重复性条件包括：

相同的测量程序；

相同的观测者；

在相同的条件下使用相同的测量仪器；

相同地点；

在短时间内重复测量。

3　重复性可以用测量结果的分散性定量地表示。

4　重复性用在重复性条件下，重复观测结果的实验标准差（称为重复性标准差）s_r定量地给出。

5　重复观测中的变动性，是由于所有影响结果的影响量不能完全保持恒定而引起的。

2.9　［测量结果的］复现性　reproducibility［of results of measurements］

在改变了的测量条件下，同一被测量的测量结果之间的一致性。

注：

1 在给出复现性时，应有效说明改变条件的详细情况。

2 可改变的条件包括：

测量原理；

测量方法；

观测者；

测量仪器；

参考测量标准；

地点；

使用条件；

时间。

3 复现性可用测量结果的分散性定量地表示。

4 测量结果在这里通常理解为已修正结果。

5 在复现性条件下，复现性用重复观测结果的实验标准差（称为复现性标准差）s_R 定量地给出。

6 又称为“再现性”。

2.10 实验标准［偏］差 experimental standard deviation

对同一被测量作 n 次测量，表征测量结果分散性的量 s 可按下式算出：

$$s(q_k)=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k-\bar{q})^2}{n-1}} \tag{1}$$

式中 q_k 是第 k 次测量结果；$\bar{q}$ 是 n 次测量的算术平均值。

注：

1 当将 n 个测量结果视作分布的样本时，$\bar{q}$ 是该分布的期望值 μ_q 的无偏估计，实验方差 $s^2(q_k)$ 是这一分布的方差 σ^2 的无偏估计。

2 $s(q_k)/\sqrt{n}$ 为 $\bar{q}$ 的分布的标准差估计，称为平均值的实验标准差。

3 将平均值的实验标准差称为平均值的标准误差是不正确的。

4 $s(q_k)$ 与 $s(q_k)/\sqrt{n}$ 的自由度相同，均为 $n-1$。

5 式（1）称为贝塞尔公式。

2.11 ［测量］不确定度 uncertainty ［of a measurement］

表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

注：

1 此参数可以是诸如标准差或其倍数，或说明了置信水准的区间的半宽度。

2 测量不确定度由多个分量组成。其中一些分量可用测量列结果的统计分布估算，并用实验标准差表征。另一些分量则可用基于经验或其他信息的假定概率分布估算，也可用标准差表征。

3 测量结果应理解为被测量之值的最佳估计，全部不确定度分量均贡献给了分散性，包括那些由系统效应引起的（如，与修正值和参考测量标准有关的）分量。

4 不确定度恒为正值。当由方差得出时，取其正平方根。

5 不确定度一词指可疑程度，广义而言，测量不确定度意为对测量结果正确性的可疑程度。不

带形容词的不确定度用于一般概念，当需要明确某一测量结果的不确定度时，要适当采用一个形容词，比如合成不确定度或扩展不确定度；但不要用随机不确定度和系统不确定度这两个术语，必要时可用随机效应导致的不确定度和系统效应导致的不确定度来说明。

6 《JJF1001—1998 通用计量术语及定义》给出的上述不确定度定义是可操作的定义，即着眼于测量结果及其分散性。虽然如此，这个定义从概念上来说与下述曾使用过的定义并不矛盾：

——由测量结果给出的被测量估计值的可能误差的度量。

——表征被测量的真值所处范围的评定。

不论采用以上哪一种不确定度的概念，其评定方法均相同，表达形式也一样。

7 本术语中的方括弧系本规范按 GUM 所加。

2.12 标准不确定度 standard uncertainty

以标准差表示的测量不确定度。

2.13 不确定度的 A 类评定 type A evaluation of uncertainty

用对观测列进行统计分析的方法，来评定标准不确定度。

注：不确定度的 A 类评定，有时又称为 A 类不确定度评定。

2.14 不确定度的 B 类评定 type B evaluation of uncertainty

用不同于对观测列进行统计分析的方法，来评定标准不确定度。

注：不确定度的 B 类评定，有时又称为 B 类不确定度评定。

2.15 合成标准不确定度 combined standard uncertainty

当测量结果是由若干个其他量的值求得时，按其他各量的方差或（和）协方差算得的标准不确定度。

注：它是测量结果标准差的估计值。

2.16 扩展不确定度 expanded uncertainty

确定测量结果区间的量，合理赋予被测量之值分布的大部分可望含于此区间。

注：扩展不确定度有时也称展伸不确定度或范围不确定度。

2.17 包含因子 coverage factor

为求得扩展不确定度，对合成标准不确定度所乘之数字因子。

注：

1 包含因子等于扩展不确定度与合成标准不确定度之比。

2 包含因子有时也称覆盖因子。

3 根据其含义可分为两种：$k = U/u_c$；$k_p = U_p/u_c$。

4 一般在 2～3 范围内。

5 下脚标 p 为置信概率，即置信区间所需要的概率。

2.18 自由度 degrees of freedom

在方差的计算中，和的项数减去对和的限制数。

注：

1 在重复性条件下，对被测量作 n 次独立测量时所得的样本方差为 $(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)/(n-1)$，其中残差为 $v_1=x_1-\bar{x}, v_2=x_2-\bar{x}, \cdots, v_n=x_n-\bar{x}$。因此，和的项数即为残差的个数 n，而 $\Sigma v_i=0$，是一个约束条件，即限制数为 1。由此可得自由度 $\nu=n-1$。

2 当测量所得 n 组数据用 t 个未知数按最小二乘法确定经验模型时，自由度 $\nu=n-t$。

3 自由度反映相应实验标准差的可靠程度，用于在评定扩展不确定度 U_p 时求得包含因子 k_p。合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的自由度，称为有效自由度 ν_{eff}，当 y 接近正态分布时，包含因子等于 t 分布临界值，即 $k_p = t_p(\nu_{eff})$。

2.19 置信概率 confidence level; level of confidence

与置信区间或统计包含区间有关的概率值（$1-\alpha$）。

注：

1 符号为 p, $p = 1-\alpha$。

2 经常用百分数表示。

3 又称置信水平，置信系数，置信水准。

2.20 ［测量］误差 error [of measurement]

测量结果减去被测量的真值。

注：

1 由于真值不能确定，实际上用的是约定真值。

2 当有必要与相对误差相区别时，此术语有时称为测量的绝对误差。注意不要与误差的绝对值相混淆，后者为误差的模。

3 误差之值只取一个符号，非正即负。

4 误差与不确定度是完全不同的两个概念，不应混淆或误用。对同一被测量不论其测量程序、条件如何，相同测量结果的误差相同；而在重复性条件下，则不同结果可有相同的不确定度。

5 测量仪器的特性可以用［示值］误差、最大允许误差等术语描述。

6 随机误差：测量结果与重复性条件下对同一量进行无限多次测量所得结果的平均值之差。由于实际上只能进行有限次测量，因而只能得出这一测量结果中随机误差的估计值。随机误差大抵是由影响量的随机时空变化所引起，这种变化带来的影响称为随机效应，它们导致重复观测中的分散性。

7 系统误差：在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量真值之差。由于系统误差及其原因不能完全获知，因此通过修正值对系统误差只能有限程度的补偿。当测量结果以代数和与修正值相加之后，其系统误差之模会比修正前的要小，但不可能为零。来源于影响量的已识别的效应称为系统效应。

2.21 修正值 correction

用代数法与未修正测量结果相加，以补偿其系统误差的值。

注：

1 修正值等于负的系统误差。

2 由于系统误差不能完全获知，因此这种补偿并不完全。

3 为补偿系统误差，而与未修正测量结果相乘的因子称为修正因子。

4 已修正的测量结果即使具有较大的不确定度，但可能仍十分接近被测量的真值（即误差甚小），因此，不应把测量不确定度与已修正结果的误差相混淆。

2.22 相关系数 correlation coefficient

相关系数是两个变量之间相互依赖性的度量，它等于两个变量间的协方差除以各自方差之积的正平方根，因此

$$\rho(y,z) = \rho(z,y)$$

$$= \frac{v(y,z)}{\sqrt{v(y,y)v(z,z)}} = \frac{v(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

其估计值

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i)$$
$$= \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

相关系数是一个纯数，$-1 \leqslant \rho \leqslant +1$ 或 $-1 \leqslant r(y_i, z_i) \leqslant +1$

注：

1 ρ 和 r 是 -1 和 $+1$ 范围内的纯数，而协方差通常具有不方便的量纲。因此，通常相关系数比协方差更有用。

2 对于多变量概率分布，通常给出相关系数矩阵，而不是协方差矩阵。由于 $\rho(y,y) = 1$ 和 $r(y_i, y_i) = 1$，所以该矩阵的对角线元素为1。

3 如果输入估计值 x_i 和 x_j 是相关的，并且 x_i 变化 δ_i，使 x_j 产生变化 δ_j，则与 x_i 和 x_j 相应的相关系数由下式近似估计

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\delta_j / u(x_j)\delta_i$$

这个关系式可以用作基本的相关系数经验估计公式。如果两者的相关系数已知，那么此式也可用于计算由一个输入估计值变化而引起另一个变化的近似值。

2.23 独立 independence

如果两个随机变量的联合概率分布是它们每个概率分布的乘积，那么这两个随机变量是统计独立的。

注：如果两个随机变量是独立的，那么它们的协方差和相关系数等于零，但反之不一定成立。

3 产生测量不确定度的原因和测量模型化

3.1 测量过程中的随机效应及系统效应均会导致测量不确定度，数据处理中的修约也会导致不确定度。这些从产生不确定度的原因上所作的分类，与从评定方法上所作的A、B分类之间不存在任何联系。

A、B分类旨在指出评定的方法不同，只是为了便于理解和讨论，并不意味着两类分量之间存在本质上的区别。它们都基于概率分布，并都用方差或标准差定量表示，为方便起见而称为A类标准不确定度和B类标准不确定度。表征A类标准不确定度分量的估计方差 u^2，是由一系列重复观测值计算得到的，即为统计方差估计值 s^2。标准不确定度 u 为 u^2 的正平方根值，故 $u = s$。B类标准不确定度分量的方差估计值 u^2，则是根据有关信息来评定的，即通过一个假定的概率密度函数得到的，此函数基于事件发生的可信程度，即主观概率或先验概率。

3.2 测量结果的不确定度反映了对被测量之值的认识不足，借助于已查明的系统效应对测量结果进行修正后，所得到的只是被测量的估计值，而修正值的不确定度以及随机效应导致的不确定度依然存在。

3.3 测量中可能导致不确定度的来源一般有：

a）被测量的定义不完整；

b）复现被测量的测量方法不理想；

c）取样的代表性不够，即被测样本不能代表所定义的被测量；

d）对测量过程受环境影响的认识不恰如其分或对环境的测量与控制不完善；

e）对模拟式仪器的读数存在人为偏移；

f）测量仪器的计量性能（如灵敏度、鉴别力阈、分辨力、死区及稳定性等）的局限性；

g）测量标准或标准物质的不确定度；

h）引用的数据或其他参量的不确定度；

i）测量方法和测量程序的近似和假设；

j）在相同条件下被测量在重复观测中的变化。

上述不确定度的来源可能相关，例如，第 j 项可能与前面各项有关。

对于那些尚未认识到的系统效应，显然是不可能在不确定度评定中予以考虑的，但它可能导致测量结果的误差。

3.4 测量不确定度通常由测量过程的数学模型和不确定度的传播律来评定。由于数学模型可能不完善，所有有关的量应充分地反映其实际情况的变化，以便可以根据尽可能多的观测数据来评定不确定度。在可能情况下，应采用按长期积累的数据建立起来的经验模型。核查标准和控制图可以表明测量过程是否处于统计控制状态之中，有助于数学模型的建立和测量不确定度的评定。

3.5 在修正值的不确定度较小且对合成标准不确定度的贡献可忽略不计的情况下，可不予考虑。如果修正值本身与合成标准不确定度比起来也很小时，修正值可不加到测量结果之中。

3.6 在实际工作中，尤其是在法制计量领域中，被测量通过与相应的测量标准相比较获得其估计值。对于测量所要求的准确度来说，测量标准的不确定度及比较过程导致的不确定度，通常可以忽略不计。例如，用校准过的标准砝码检定商用台案秤。

3.7 当某些被测量是通过与物理常量相比较得出其估计值时，按常数或常量来报告测量结果，可能比用测量单位来报告测量结果，有较小的不确定度。例如，一台高质量的齐纳电压标准（Zener voltage standard）通过与约瑟夫逊效应电压基准相比较而被校准，该基准是以国际计量委员会（CIPM）向国际推荐的约瑟夫逊常量 K_{1-90} 的约定值为基础的，当按约定的 K_{1-90} 作为单位来报告测量结果时，齐纳电压标准的已校准电压 V_s 的相对合成标准不确定度 $u_{crel}(V_s) = u_c(V_s)/V_s = 2\times10^{-8}$。然而，当 V_s 按电压的单位伏特给出时，$u_{crel}(V_s) = 4\times10^{-7}$，因为 K_{1-90} 用 Hz/V 表示其量值时引入了不确定度。

3.8 在测量不确定度评定中，也必须剔除测量结果中的异常值（通常由于读取、记录或分析数据的失误所导致）。异常值的剔除应通过对数据的适当检验进行（例如，按《GB 4883—1985 正态分布中异常值的判断和处理》）。

3.9 测量中，被测量 Y（即输出量）由 N 个其他量 $X_1, X_2, \cdots, X_N$，通过函数关系 f 来确定，即：

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N) \tag{2}$$

式中，X_i 是对 Y 的测量结果 y 产生影响的影响量(即输入量)。式(2) 称为测量模型或数学模型 。

如被测量 Y 的估计值为 y，输入量 X_i 的估计值为 x_i，则有：

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{3}$$

式（2）中大写字母表示的量的符号，在本规范中既代表可测的量，也代表随机变量。当叙述为 X_i 具有某概率分布时，这个符号的含义就是后者。

在一列观测值中，第 k 个 X_i 的观测值用 X_{ik} 表示。如电阻器的电阻符号为 R，则其观测列中的第 k 次值表示为 R_k 。

又如，一个随温度 t 变化的电阻器两端的电压为 V，在温度为 t_0 时的电阻为 R_0，电阻器的温度系数为 α，则电阻器的损耗功率 P（被测量）取决于 V, R_0, α 和 t，即：

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)] \tag{4}$$

测量损耗功率 P 的其他方法可能有不同的数学模型。数学模型与测量程序有关。

3.10 输出量 Y 的输入量 $X_1, X_2, \cdots X_N$ 本身可看作被测量，也可取决于其他量，甚至包括具有系统效应的修正值，从而可能导出一个十分复杂的函数关系式，以至函数 f 不能明确地表示出来。f 也可以用实验的方法确定，甚至只用数值方程给出（数值方程为物理方程的一种，用于表示在给定测量单位的条件下，数值之间的关系，而无物理量之间的关系）。因此，如果数据表明 f 没有能将测量过程模型化至测量所要求的准确度，则必须在 f 中增加输入量，即增加影响量。例如，在 3.9 的例中，再增加以下输入量：电阻器上已知的温度非均匀分布、电阻温度系数的非线性关系、电阻 R 与大气压力 p_{amb} 的关系等。

式（2）也可能简单到 $Y = X_1 - X_2$，甚至 $Y = X$ 。

3.11 式（3）中，被测量 Y 的最佳估计值 y 在通过输入量 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的估计值 $x_1, x_2 \cdots, x_N$ 得出时，可有以下两种方法：

a)

$$\begin{aligned} y = \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{Nk}) \end{aligned} \tag{5}$$

式中，y 是取 Y 的 n 次独立观测值 y_k 的算术平均值，其每个观测值 y_k 的不确定度相同，且每个 y_k 都是根据同时获得的 N 个输入量 X_i 的一组完整的观测值求得的。

b)

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N) \tag{6}$$

式中，$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}$，它是独立观测值 $x_{i,k}$ 的算术平均值。这一方法的实质是先求 X_i 的最佳估计值 $\bar{x}_i$，再通过函数关系式得出 y 。

以上两种方法，当 f 是输入量 X_i 的线性函数时，它们的结果相同。但当 f 是 X_i 的非线性函数时，（5）式的计算方法较为优越。

3.12 输入量 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 可以是：

——由当前直接测定的量。它们的值与不确定度可得自单一观测、重复观测、依据经验对信息的估计，并可包含测量仪器读数修正值，以及对周围温度、大气压、湿度等影响的修正值。

——由外部来源引入的量。如已校准的测量标准、有证标准物质、由手册所得的参考数据等。

x_i 的不确定度是 y 的不确定度的来源。寻找不确定度来源时，可从测量仪器、测量环境、测量人员、测量方法、被测量等方面全面考虑，应做到不遗漏、不重复，特别应考虑对结果影响大的不确定度来源。遗漏会使 y 的不确定度过小，重复会使 y 的不确定度过大。

评定 y 的不确定度之前，为确定 Y 的最佳值，应将所有修正量加入测得值，并将所有测量异常值剔除。

y 的不确定度将取决于 x_i 的不确定度，为此首先应评定 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$。评定方法可归纳为 A、B 两类。

4 标准不确定度的 A 类评定

4.1 基本方法

在重复性条件或复现性条件下得出 n 个观测结果 x_k，随机变量 x 的期望值 μ_x 的最佳估计是 n 次独立观测结果的算术平均值 $\bar{x}$（$\bar{x}$ 又称为样本平均值）：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{7}$$

由于影响量的随机变化或随机效应时空影响的不同，每次独立观测值 x_k 不一定相同，它与 $\bar{x}$ 之差称为残差 v，

$$v_k = x_k - \bar{x} \tag{8}$$

观测值的实验方差按式（1）为：

$$s^2(x_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 \tag{9}$$

式中，$s^2(x_k)$ 是 x_k 的概率分布的总体方差 σ^2 的无偏估计，其正平方根 $s(x_k)$ 表征了 x_k 的分散性。确切地说，表征了它们在 $\bar{x}$ 上下的分散性。$s(x_k)$ 称为样本标准差或实验标准差，表示实验测量列中任一次测量结果的标准差。通常以独立观测列的算术平均值作为测量结果，测量结果的标准不确定度为 $s(\bar{x}) = s(x_k)/\sqrt{n} = u(\bar{x})$。

观测次数 n 应充分多，以使 $\bar{x}$ 成为 x 的期望值 μ_x 的可靠估计值，并使 $s^2(x_k)$ 成为 σ^2 的可靠估计值；从而也使 $u(x_k)$ 更为可靠。

尽管方差 $s^2(x)$ 在不确定度评定与表示中是更为基本的量，但由于标准差 $s(x)$ 与 x 有相同量纲，较为直观和便于理解，故使用得更为广泛。

4.2 对一个测量过程，若采用核查标准或控制图的方法使其处于统计控制状态，则该统计控制下，测量过程的合并样本标准差 s_p 表示为：

$$s_p = \sqrt{\frac{\sum s_i^2}{k}} \tag{10}$$

式中，s_i 为每次核查时的样本标准差；k 为核查次数。在相同情况下，由该测量过程对被测量 X 进行 n 次重复观测，以算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果，则该结果的标准不确定度为：

$$u(\bar{x}) = s_p / \sqrt{n} \tag{11}$$

4.3 在规范化的常规测量中，如对被测量 x_i 都进行了重复性条件下或复现性条件下的 n 次独立观测，有 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}$，其平均值为 $\bar{x}_i$，如有 m 组这样的被测量，按下式可得 $s_p^2(x_i)$ 为：

$$s_p^2(x_i) = \frac{1}{m(n-1)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = u^2(x_i) \tag{12}$$

如这 m 组已分别按其重复次数算出了各次实验标准差 s_i，则 s_p 可按下式给出：

$$s_p^2(x_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^2 = u^2(x_i) \tag{13}$$

式（12）和（13）给出的 s_p，自由度为 $m(n-1)$。

如对 m 个被测量 X_i 所重复的次数不完全相同，设各为 n_i，而 X_i 的标准差 $s(x_i)$ 的自由度为 $\nu_i = n_i - 1$，通过 m 个 s_i 与 ν_i 可得 s_p^2 为：

$$s_p^2(x_i) = \frac{1}{\sum \nu_i}\sum \nu_i s_i^2 = u^2(x_i) \tag{14}$$

自由度为 $\nu = \sum_{i=1}^{m}\nu_i$。

4.4 在重复性条件或复现性条件下，对 X_i 进行 n 次独立观测，计算结果中的最大值与最小值之差 R（称为极差），在 X_i 可以估计接近正态分布的前提下，单次测量结果 x_i 的实验标准差 $s(x_i)$ 可按下式近似地评定：

$$s(x_i) = \frac{R}{C} = u(x_i) \tag{15}$$

式（15）中系数 C 及自由度 ν 如下表：

表 1 极差系数 C 及自由度 ν

n	2	3	4	5	6	7	8	9
C	1.13	1.64	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97
ν	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.3	6.0	6.8

一般在测量次数较小时采用该法。

4.5 当输入量 X_i 的估计值 x_i 是由实验数据用最小二乘法拟合的曲线上得到时，曲线上任何一点和表征曲线拟合参数的标准不确定度，可用有关的统计程序评定。

4.6 在重复性条件下所得的测量列的不确定度，通常比用其他评定方法所得到的不确定度更为客观，并具有统计学的严格性，但要求有充分的重复次数。此外，这一测量程

序中的重复观测值，应相互独立。例如：

a）被测量是一批材料的某一特性，所有重复观测值来自同一样品，而取样又是测量程序的一部分，则观测值不具有独立性，必须把不同样本间可能存在的随机差异导致的不确定度分量考虑进去；

b）测量仪器的调零是测量程序的一部分，重新调零应成为重复性的一部分；

c）通过直径的测量计算圆的面积，在直径的重复测量中，应随机地选取不同的方向观测；

d）当使用测量仪器的同一测量段进行重复测量时，测量结果均带有相同的这一测量段的误差，而降低了测量结果间的相互独立性；

e）在一个气压表上重复多次读取示值，把气压表扰动一下，然后让它恢复到平衡状态再进行读数，因为即使大气压力并无变化，还可能存在示值和读数的方差。

4.7 如果被测量估计值 x_i 在多次观测中存在相关的随机效应，例如，都与时间有关，则按本规范计算是不妥的。在这种情况下，应采用专门为相关的随机变量测量列的数据处理设计的统计方法来分析观测值。例如，在晶振频率测量中，由于噪声导致理论方差发散，从而需采用阿伦方差。

5. 标准不确定度的B类评定

5.1 获得B类标准不确定度的信息来源一般有：

a）以前的观测数据；

b）对有关技术资料和测量仪器特性的了解和经验；

c）生产部门提供的技术说明文件；

d）校准证书、检定证书或其他文件提供的数据、准确度的等别或级别，包括目前暂在使用的极限误差等；

e）手册或某些资料给出的参考数据及其不确定度；

f）规定实验方法的国家标准或类似技术文件中给出的重复性限 r 或复现性限 R 。

用这类方法得到的估计方差 $u^2(x_i)$，可简称为B类方差。

5.2 如估计值 x_i 来源于制造部门的说明书、校准证书、手册或其他资料，其中同时还明确给出了其不确定度 $U(x_i)$ 是标准差 $s(x_i)$ 的 k 倍，指明了包含因子 k 的大小，则标准不确定度 $u(x_i)$ 可取 $U(x_i)/k$，而估计方差 $u^2(x_i)$ 为其平方 。

例：校准证书上指出标称值为1kg的砝码质量 $m = 1\,000.000\,32$ g，并说明按包含因子 $k = 3$ 给出的扩展不确定度 $U = 0.24$ mg。则该砝码的标准不确定度为 $u(m) = 0.24\ \text{mg}/3 = 80\ \mu\text{g}$，估计方差为 $u^2(m) = (80\ \mu\text{g})^2 = 6.4 \times 10^{-9}\ \text{g}^2$。相应的相对标准不确定度为：

$$u_{\text{rel}}(m) = u(m)/m = 80 \times 10^{-9}$$

5.3 如 x_i 的扩展不确定度不是按标准差 $s(x_i)$ 的 k 倍给出，而是给出了置信概率 p 为90%、95% 或 99% 的置信区间的半宽 U_{90}、U_{95} 或 U_{99}，除非另有说明，一般按正态分布考虑评定其标准不确定度 $u(x_i)$。对应于上述三种置信概率的包含因子 k_p 分别为1.64、1.96

或 2.58，更为完整的关系如表 2：

表 2　正态分布情况下置信概率 p 与包含因子 k_p 间的关系

p(%)	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k_p	0.67	1	1.645	1.960	2	2.576	3

例：校准证书上给出标称值为 10 Ω 的标准电阻器的电阻 R_s 在 23 ℃时为：

$$R_s(23℃) = (10.000\ 74 \pm 0.000\ 13)\Omega$$

同时说明置信概率 $p = 99\%$ 。

由于 $U_{99} = 0.13\ \mathrm{m}\Omega$，按表 2，$k_p = 2.58$，其标准不确定度为 $u(R_s) = 0.13\ \mathrm{m}\Omega/2.58 = 50\ \mu\Omega$，估计方差为 $u^2(R_s) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2.5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$ 。相应的相对标准不确定度为：

$$u_{\mathrm{rel}}(R_s) = u(R_s)/R_s = 5 \times 10^{-6}$$

5.4　如根据所获得的资料表明，输入量 X_i 的值有 50% 的概率落于 a_- 和 a_+ 的区间内。取 X_i 的最佳估计值 x_i 为该区间的中点。设该区间的半宽为 $(a_+ - a_-)/2 = a$。在假设 X_i 的可能值接近正态分布的前提下，按表 2，$k_{50} = 0.67$，则取 x_i 的标准不确定度 $u(x_i) = a/0.67$，其方差为 $u^2(x_i) = (a/0.67)^2$ 。

例：机械师在测量零件尺寸时，估计其长度以 50% 的概率落于 10.07 mm 至 10.15 mm 之间，并给出了长度 $l = (10.11 \pm 0.04)$ mm，这说明 0.04 mm 为 $p = 50\%$ 的置信区间半宽，在接近正态分布的条件下，按表 2，$k_{50} = 0.67$，则长度 l 的标准不确定度为 $u(l) = 0.04\ \mathrm{mm}/0.67 = 0.06\ \mathrm{mm}$，其方差为 $u^2(l) = (0.04\ \mathrm{mm}/0.67)^2 = 3.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm}^2$。

5.5　如已知信息表明 X_i 之值接近正态分布，并以 0.68 概率落于 $(a_+ - a_-)/2 = a$ 的对称范围之内，按表 2，$k_p = 1$，则 $u(x_i) = a$。

5.6　如已知信息表明 X_i 之值 x_i 分散区间的半宽为 a，且 x_i 落于 $x_i - a$ 至 $x_i + a$ 区间的概率 p 为 100%，即全部落在此范围中，通过对其分布的估计，可以得出标准不确定度 $u(x_i) = a/k$，因为 k 与分布状态有关，见表 3 。

表 3　常用分布与 k、u（x_i）的关系

分布类别	p（%）	k	$u(x_i)$
正态	99.73	3	$a/3$
三角	100	$\sqrt{6}$	$a/\sqrt{6}$
梯形 $\beta = 0.71$	100	2	$a/2$
矩形（均匀）	100	$\sqrt{3}$	$a/\sqrt{3}$
反正弦	100	$\sqrt{2}$	$a/\sqrt{2}$
两点	100	1	a

表3中β为梯形的上底与下底之比，对于梯形分布来说，$k=\sqrt{6/(1+\beta^2)}$，特别当β等于1时，梯形分布变为矩形分布；当β等于0时，变为三角分布。

例1：手册中给出纯铜在20℃时的线膨胀系数$\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$为16.52×10^{-6}℃$^{-1}$，并说明此值变化的半范围为$\alpha=0.40\times10^{-6}$℃$^{-1}$。按$\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$在$[(16.52-0.40)\times10^{-6}$℃$^{-1}$，$(16.52+0.40)\times10^{-6}$℃$^{-1}]$区间内为均匀分布，于是

$$u(\alpha)=0.40\times10^{-6}\text{℃}^{-1}/\sqrt{3}=0.23\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$

例2：数字电压表制造厂说明书说明：仪器校准后1～2年内，在1 V内示值最大允许误差的模为$14\times10^{-6}\times$（读数）$+2\times10^{-6}\times$（范围）。设校准后20月在1 V内测量电压，在重复性条件下独立测得电压V，其平均值为：

$$\overline{V}=0.928\ 571\ \mathrm{V}$$

平均值的实验标准差为：$s(\overline{V})=12\ \mu\mathrm{V}$。

电压表最大允许误差的模：

$$a=14\times10^{-6}\times0.928\ 571\ \mathrm{V}+2\times10^{-6}\times1\mathrm{V}=15\ \mu\mathrm{V}$$

a即为均匀分布的半宽，按表3，$k=\sqrt{3}$，则示值的标准不确定度为：

$$u(\Delta V)=15\ \mu\mathrm{V}/\sqrt{3}=8.7\mu\mathrm{V}$$

由示值不稳定性导致的不确定度为A类标准不确定度，即$s(\overline{V})=12\ \mu\mathrm{V}$，由示值误差导致的标准不确定度为B类标准不确定度，即$u(\Delta V)=8.7\ \mu\mathrm{V}$。

5.7 在缺乏任何其他信息的情况下，一般估计为矩形分布是较合理的。但如果已知被研究的量X_i的可能值出现在a_-至a_+中心附近的概率，大于接近区间的边界时，则最好按三角分布计算。如果x_i本身就是重复性条件下的几个观测值的算术平均值，则可估计为正态分布（参见附录B）。

5.8 在输入量X_i可能值的下界a_-和上界a_+相对于其最佳估计值x_i并不对称的情况下，即下界$a_-=x_i-b_-$，上界$a_+=x_i+b_+$其中$b_-\neq b_+$。这时由于x_i不处于a_-至a_+区间的中心，X_i的概率分布在此区间内不会是对称的，在缺乏用于准确判定其分布状态的信息时，按矩形分布处理可采用下列近似评定：

$$u^2(x_i)=\frac{(b_++b_-)^2}{12}=\frac{(a_+-a_-)^2}{12} \tag{16}$$

例：设手册中给出的铜膨胀系数$\alpha_{20}(\mathrm{Cu})=16.52\times10^{-6}$℃$^{-1}$，但指明最小可能值为$16.40\times10^{-6}$℃$^{-1}$，最大可能值为$16.92\times10^{-6}$℃$^{-1}$。

这时，

$$b_-=(16.52-16.40)\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$
$$=0.12\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$
$$b_+=(16.92-16.52)\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$
$$=0.40\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$

由式（16）得：

$$u(\alpha_{20})=0.15\times10^{-6}\text{℃}^{-1}$$

有时对于不对称的界限，可以对估计值x_i加以修正，修正值的大小为$(b_+-b_-)/2$，

则修正后 x_i 就在界限的中心位置 $x_i = (a_- + a_+)/2$，而其半宽 $a = (a_+ - a_-)/2$，从而可按5.4～5.7各节所述方式处理。

5.9 对于数字显示式测量仪器，如其分辨力为 δx，则由此带来的标准不确定度为 $u(x) = 0.29\delta x$。

对于所引用的已修约的值，如其修约间隔为 δx，则因此导致的标准不确定度为 $u(x) = 0.29\delta x$。

5.10 在规定实验方法的国家标准或类似技术文件中，按规定的测量条件，当明确指出两次测量结果之差的重复性限 r 或复现性 R 时，如无特殊说明，则测量结果标准不确定度为 $u(x_i) = r/2.83$ 或 $u(x_i) = R/2.83$（参见 ISO 5725 Accuracy of measurement methods and results）。

5.11 当测量仪器检定证书上给出准确度等别时，可按检定系统或检定规程所规定的该等别的测量不确定度大小，按5.2或5.3进行评定。

当测量仪器检定证书上给出准确度级别时，可按检定系统或检定规程所规定的该级别的最大允许误差与其他信息进行评定。

5.12 B类不确定度分量的自由度与所得到的标准不确定度 $u(x_i)$ 的相对标准不确定度 $\sigma\{u(x_i)\}/u(x_i)$ 有关，其关系为：

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \tag{17}$$

根据经验，按所依据的信息来源的可信程度来判断 $u(x_i)$ 的标准不确定度，从而推算出比值 $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$。按式（17）计算出的 ν_i 列于表4：

表4 $\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$ 与 ν_i 关系

$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	ν_i	$\sigma[u(x_i)]/u(x_i)$	ν_i
0	∞	0.30	6
0.10	50	0.40	3
0.20	12	0.50	2
0.25	8		

6 合成标准不确定度的评定

6.1 合成标准不确定度按输出量 Y 的估计值 y 给出的符号为 $u_c(y)$。其中，y 通常采用量的符号，如表压 p_e，动力粘度 η，溶液中 NaCl 的质量分数 w(NaCl) 的合成标准不确定度，可分别表示为 $u_c(p_e)$、$u_c(\eta)$、$u_c[w(\mathrm{NaCl})]$。$u_c^2(y)$ 为输出估计值的合成方差，而合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为其正平方根。可以按不确定度分量的A、B两类评定方法分别合成，如 $u_{cA}(y)$、$u_{cB}(y)$ 分别为仅按A、B类标准不确定度分量的合成不确定度。

6.2 当全部输入量 X_i 是彼此独立或不相关时，合成标准不确定度 $u_c(y)$ 由下式得出：

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) \tag{18}$$

式中，标准不确定度 $u(x_i)$ 既可以按 A 类，也可以按 B 类方法评定。$u_c(y)$ 是个估计的标准差,表征合理赋予被测量 Y 之值的分散性。式(18) 是基于 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的泰勒级数的一阶近似,称为“不确定度传播律”。但当 f 是明显非线性时,式(18) 中还应包括泰勒级数的高阶项,当每个输入量 X_i 都对其平均值 x_i 对称分布时，加进式（18）的下一高阶的主要项为：

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right\}u^2(x_i)u^2(x_j)$$

6.3　偏导数 $\partial f/\partial x_i$ 是在$X_i = x_i$ 时导出的,这些偏导数称为灵敏系数,符号为 c_i,即 $c_i = \partial f/\partial x_i$。它描述输出估计值 y 如何随输入估计值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 的变化而变化。尤其是,输入估计值 x_i 的微小变化 Δx_i 引起 y 的变化，可用 $(\Delta y)_i = (\partial f/\partial x_i)\Delta x_i = c_i \Delta x_i$ 表示,如这一变化系 $u(x_i)$ 所导致,则 y 的相应变化为$(\partial f/\partial x_i)u(x_i) = c_i u(x_i)$。因而式(18) 在 X_i 互不相关时，可表达为：

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}[c_i u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{19}$$

式中，$c_i = \partial f/\partial x_i, u_i(y) = |c_i| u(x_i)$

偏导数应是在 X_i 的期望值下评定，即：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, \cdots, x_N}$$

例：在 3.9 节的例中，

$$c_1 = \partial P/\partial V = 2V/R_0[1 + \alpha(t - t_0)] = 2P/V$$

$$c_2 = \partial P/\partial R_0 = -V^2/R_0^2[1 + \alpha(t - t_0)] = -P/R_0$$

$$\begin{aligned} c_3 = \partial P/\partial \alpha &= -V^2(t - t_0)/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]^2 \\ &= -P(t - t_0)/[1 + \alpha(t - t_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 = \partial P/\partial t &= -V^2\alpha/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]^2 \\ &= -P\alpha/[1 + \alpha(t - t_0)] \end{aligned}$$

由于各分量互不相关，因而合成方差 $u^2(P)$ 为：

$$\begin{aligned} u^2(P) &= \left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]^2 u^2(V) + \left[\frac{\partial P}{\partial R_0}\right]^2 u^2(R_0) \\ &\quad + \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right]^2 u^2(\alpha) + \left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]^2 u^2(t) \\ &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\ &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P) \end{aligned}$$

6.4　有时，灵敏系数 c_i 可由实验测定,即通过变化第 i 个 x_i,而保持其余输入量不变,从而测定 Y 的变化量。

6.5　如果，式（2）对输入量 X_i 的标称值$X_{i,0}$ 作一阶展开：

$$Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \cdots + c_N\delta_N$$

式中：　$Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \cdots, X_{N,0})$；

$c_i = \partial f/\partial X_i$ 在 $X_i = X_{i,0}$ 求导；

$\delta_i = X_i - X_{i,0}$

为了分析不确定度，常将 X_i 变换到 δ_i，使被测量近似地为线性函数。

例：5.6 节例 2 中电压 $V = \overline{V} + \Delta V$，设电压重复测量按 A 类评定方法得出 $u(\overline{V}) = 12\ \mu\mathrm{V}$，而测量出的平均值 $\overline{V} = 0.928\ 571\mathrm{V}$，附加修正值 $\Delta V = 0$。

测量仪器引入的标准不确定度 $u(\Delta V) = 8.7\ \mu\mathrm{V}$，由于 $\partial V/\partial\overline{V} = 1$ 及 $\partial V/\partial(\Delta V) = 1$，并且，$\overline{V}$ 与 ΔV 彼此独立，故 V 的合成方差为：

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta V)$$

$$= (12\ \mu\mathrm{V})^2 + (8.7\ \mu\mathrm{V})^2 = 220 \times 10^{-12}\ \mathrm{V}^2$$

合成标准不确定度为：

$$u_c(V) = 15\ \mu\mathrm{V}$$

相对合成标准不确定度为：

$$u_{\mathrm{crel}}(V) = u_c(V)/V = 16 \times 10^{-6}$$

6.6　在 X_i 彼此独立的条件下，如果函数 f 的形式表现为：

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

$$= cX_1^{p_1}X_2^{p_2}\cdots X_N^{p_N}$$

式中，系数 c 并非灵敏系数，指数 p_i 可以是正数、负数或分数，设 p_i 的不确定度 $u(p_i)$ 可忽略不计，则式（18）可表示为：

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[p_i u(x_i)/x_i]^2 \tag{20}$$

这里，给出的是相对合成方差，式（20）说明在这一函数关系下，采用相对标准不确定度 $u_{\mathrm{crel}} = u_c(y)/|y|$ 和 $u_{\mathrm{rel}}(x_i) = u(x_i)/|x_i|$ 进行评定比较方便，但要求 $y \neq 0$ 和 $x_i \neq 0$。

而且，当 Y 具有这一函数形式时，可设 $X_i = X_{i,0}(1+\delta_i)$，从而实现将 Y 变换成线性函数（见 6.5），并得到以下近似关系：

$$(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i\delta_i$$

另外，对数变换 $Z = \ln Y$ 和 $W_i = \ln X_i$ 可以使新的变量完全线性化为：

$$Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$$

如果，指数 p_i 只是 +1 或 −1，式（20）就进一步简化为：

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[u(x_i)/x_i]^2$$

即估计值 y 的相对方差等于输入估计值 x_i 的相对方差之和。若 $y = x^n$，则

$$\frac{u_c(y)}{y} = n\frac{u(x)}{x}$$

即 y 为 x 的 n 次幂时，y 的相对不确定度等于 x 的相对不确定度的 n 倍。

例 1：立方体体积 V 的测量通过输入长 l、宽 b 和高 h，其函数关系为：

$$V = f(l, b, h) = lbh.$$

按式（20）可得：

$$\left[\frac{u_c(V)}{V}\right]^2 = \left[\frac{u(l)}{l}\right]^2 + \left[\frac{u(b)}{b}\right]^2 + \left[\frac{u(h)}{h}\right]^2$$

或写成：

$$u_{crel}^2(V) = u_{rel}^2(l) + u_{rel}^2(b) + u_{rel}^2(h)$$

例 2：圆柱体体积 V 的测量通过输入半径 r 与高 h，其函数关系为：

$$V = \pi r^2 h$$

式中，$u(\pi)$ 可通过取适当的有效位而忽略不计，则按式（20）可得：

$$u_{crel}^2(V) = 2^2 u_{rel}^2(r) + u_{rel}^2(h)$$

6.7 当被测量 Y 为相互独立的输入量 X_i 的线性函数时，且灵敏系数 c_i 为 $+1$ 或 -1，则式(18) 可简化为：

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i) \tag{21}$$

例：$y = x_1 + x_2$

且 x_1 与 x_2 无关，$u(x_1) = 1.73\ \mathrm{mm}$，$u(x_2) = 1.15\ \mathrm{mm}$

则 $u_c^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2)$

$$u_c = \sqrt{\sum u^2} = 2.08\ \mathrm{mm} \approx 2.1\ \mathrm{mm}$$

6.8 当输入量 X_i 明显相关时，就必须考虑其相关性。相关常由相同原因所致，比如当两个输入量使用了同一台测量仪器，或者使用了相同的实物标准或参考数据，则这两个输入量之间就会存在较大的相关性。

6.9 当输入量相关时，测量结果 y 的合成方差 $u_c^2(y)$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \end{aligned} \tag{22}$$

式中，x_i 和 x_j 分别是 X_i 和 X_j 的估计值，而协方差 $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$，则 x_i 与 x_j 之间相关程度可用估计的相关系数来表示：

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{23}$$

式中，$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ 且 $-1 \leqslant r(x_i, x_j) \leqslant +1$，如 x_i 与 x_j 相互独立，则 $r(x_i, x_j) = 0$，即一个值的变化不会预期另一个值也发生变化。

相关系数这一术语比协方差易于理解，式（22）中的协方差项可写成：

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \tag{24}$$

采用灵敏系数的符号，式（22）即为：

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \tag{25}$$

在所有输入估计值都相关，且相关系数 $r(x_i,x_j)=1$ 的特殊情况下，式（25）简化为：

$$u_c^2(y)=\left[\sum_{i=1}^{N}c_iu(x_i)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2$$

这时，$u_c(y)$ 为由每个输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$ 产生的输出估计值 y 的标准不确定度分量 $u_i(y)=c_iu(x_i)$ 的线性和。

例：当标称值均为 1kΩ 的 10 个电阻器，用同一个值为 R_s 的标准电阻器校准时，设校准不确定度可忽略，检定证书给出的 R_s 不确定度为 $u(R_s)=0.10\ \Omega$。现将此 10 个电阻器用电阻可忽略的导线串联，构成标称值为 10 kΩ 的参考电阻 $R_{\text{ref}}=f(R_i)=\sum_{i=1}^{10}R_i$。由于对电阻器来说 $r(x_i,x_j)=r(R_i,R_j)=1$，$\partial f/\partial x_i=\partial R_{\text{ref}}/\partial R_i=1$，$u(x_i)=u(R_i)=u(R_s)$，则：

$$u_c^2(y)=\left[\sum_{i=1}^{N}c_iu(x_i)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2$$

故得 $u_c(R_{\text{ref}})=\sum_{i=1}^{10}u(R_s)=10\times0.10\ \Omega=1.0\ \Omega$

6.10 合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的自由度称为有效自由度 ν_{eff}，如果 $u_c^2(y)$ 是两个或多个估计方差分量的合成，即 $u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)$，则即使当每个 x_i 均为服从正态分布的输入量 X_i 的估计值时，变量 $(y-Y)/u_c(y)$ 可以近似为 t 分布，其有效自由度 ν_{eff} 可由韦尔奇－萨特思韦特（Welch-Satterthwaite）公式计算：

$$\nu_{\text{eff}}=\frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{26}$$

显然有：

$$\nu_{\text{eff}}\leqslant\sum_{i=1}^{N}\nu_i$$

式（26）也可用于相对标准不确定度的合成，按式（20）计算时有：

$$\nu_{\text{eff}}=\frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{N}\frac{[p_iu(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}=\frac{[u_{\text{crel}}(y)]^4}{\sum_{i=1}^{N}\frac{[p_iu_{\text{rel}}(x_i)]^4}{\nu_i}} \tag{27}$$

必要时除 ν_{eff} 外,可分别处理 $u_{\mathrm{cA}}^2(y)$ 和 $u_{\mathrm{cB}}^2(y)$ 对 $u_{\mathrm{c}}^2(y)$ 的贡献,其关系为：

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = u_{\mathrm{cA}}^2(y) + u_{\mathrm{cB}}^2(y)$$

例：设 $y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$,输入量 X_1、X_2、X_3 彼此独立,其估计值 x_1、x_2、x_3 是独立重复观测值的算术平均值,重复次数分别为 $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ 和 $n_3 = 15$，则其相对标准不确定度分别为：

$$u_{\mathrm{rel}}(x_1) = u(x_1)/x_1 = 0.25\%$$
$$u_{\mathrm{rel}}(x_2) = u(x_2)/x_2 = 0.57\%$$
$$u_{\mathrm{rel}}(x_3) = u(x_3)/x_3 = 0.82\%$$

则其合成方差按式（20）为：

$$u_{\mathrm{crel}}^2(y) = [u_{\mathrm{c}}(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3}[u_{\mathrm{rel}}(x_i)]^2$$
$$= (1.03\%)^2$$

有效自由度为：

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_{\mathrm{crel}}^4(y)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{u_{\mathrm{rel}}^4(x_i)}{\nu_i}} = \frac{1.03^4}{\frac{0.25^4}{10-1}+\frac{0.57^4}{5-1}+\frac{0.82^4}{15-1}}$$
$$= 19$$

6.11　当随机效应或系统效应导致的不确定度分量，既可以按统计方法取得，又可以按其他方法评定时，只允许在 $u_{\mathrm{c}}(y)$ 中包含其中的一个。

同一种效应导致的不确定度已作为一个分量进入 $u_{\mathrm{c}}(y)$ 时，它不应再被包含在另外的分量之中。例如：在几何量测量中，通过重复安装进行读数来得出被测件由于安装的不确定度因素导致的分量，其中就包含了读数导致的分量，在计算 $u_{\mathrm{c}}(y)$ 时，就不应再加入读数的不确定度分量。

7　扩展不确定度的评定

7.1　扩展不确定度分为两种：

a）在合成标准不确定度 $u_{\mathrm{c}}(y)$ 确定后,乘以一个包含因子 k,即 $U = ku_{\mathrm{c}}(y)$。可以期望在 $y - U$ 至 $y + U$ 的区间包含了测量结果可能值的较大部分。k 值一般取 2 ~ 3,在大多数情况下取 $k = 2$,当取其他值时,应说明其来源。

b）将 $u_{\mathrm{c}}(y)$ 乘以给定概率 p 的包含因子 k_p,从而得到扩展不确定度 U_p。可以期望在 $y - U_p$ 至 $y + U_p$ 的区间内,以概率 p 包含了测量结果的可能值。k_p 与 y 的分布有关。当可以按中心极限定理估计接近正态分布时,k_p 采用 t 分布临界值(或简称 t 值,见附录 A)。$k_p = t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$,一般采用的 p 值为 99% 和 95%。多数情况下,采用 $p = 95\%$。对某些测量标准的检定或校准,根据有关规定可采用 $p = 99\%$。当 ν_{eff} 充分大时,可以近似认为 $k_{95} = 2$、$k_{99} = 3$,从而分别得出 $U_{95} = 2u_{\mathrm{c}}(y)$、$U_{99} = 3u_{\mathrm{c}}(y)$。

7.2　当只给出扩展不确定度 U 时,不必评定各分量及合成标准不确定度的自由度 ν_i 及 ν_{eff}。

在实际工作中，如对 Y 可能值的分布作正态分布的估计，虽未计算 ν_{eff}，但可估计其值并不太小时，则 $U = 2u_c(y)$ 大约是置信概率近似为 95% 的区间的半宽，而 $U = 3u_c(y)$ 大约是置信概率近似为 99%的区间的半宽。

7.3 如果可以确定 Y 可能值的分布不是正态分布，而是接近于其他某种分布，则决不应按 $k = 2 \sim 3$ 或 $k_p = t_p(\nu_{eff})$ 计算 U 或 U_p。例如，Y 可能值近似为矩形分布，则包含因子 k_p 与 U_p 之间的关系如下：

$$\text{对于} \quad U_{95}, k_p = 1.65$$

$$\text{对于} \quad U_{99}, k_p = 1.71$$

8 测量不确定度的报告与表示

8.1 当给出完整的测量结果时，一般应报告其测量不确定度。报告应尽可能详细，以便使用者可以正确地利用测量结果。按技术规范要求无需给出测量不确定度的除外。

8.2 在工业、商业等日常的大量测量中，有时虽然没有任何明确的不确定度报告，但所用的测量仪器是经过检定处于合格状态，并且测量程序有技术文件明确规定，则其不确定度可以由技术指标或规定的文件评定。

证书上的校准结果或修正值应给出测量不确定度。

8.3 对于比较重要的测量，不确定度的报告一般包括以下内容：

a）有关输入量与输出量的函数关系以及灵敏系数 c_i；

b）修正值和常数的来源及其不确定度；

c）输入量 X_i 的实验观测数据及其估计值 x_i，标准不确定度 $u(x_i)$ 的评定方法及其量值、自由度 ν_i，并将它们列成表格；

d）对所有相关输入量给出其协方差或相关系数 r 及其获得方法；

e）测量结果的数据处理程序，该程序应易于重复，必要时报告结果的计算应能独立重复。

8.4 当用合成标准不确定度报告测量结果的不确定度时，除 8.3 所涉及的内容外，还须注意：

a）明确说明被测量 Y 的定义；

b）给出被测量 Y 的估计值 y、合成标准不确定度 $u_c(y)$，及其单位，必要时还应给出自由度 ν_{eff} 或 ν_{effA}、ν_{effB}。

c）必要时也可给出相对标准不确定度 $u_{crel}(y)$。

8.5 合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的报告可用以下 4 种形式之一，例如，标准砝码的质量为 m_s，测量结果为 100.021 47 g，合成标准不确定度 $u_c(m_s)$ 为 0.35 mg，则

a）$m_s = 100.021\ 47$ g；合成标准不确定度 $u_c(m_s) = 0.35$ mg。

b）$m_s = 100.021\ 47(35)$ g；括号内的数是按标准差给出，其末位与前面结果内末位数对齐。

c）$m_s = 100.021\ 47(0.000\ 35)$ g；括号内按标准差给出，与前面结果有相同计量单位。

d) m_s = (100.021 47 ± 0.000 35) g；正负号后之值按标准差给出，它并非置信区间。

形式 b) 一般用于公布常数、常量。

形式 d) 虽为 ISO 31《量和单位》一贯采用，但因习惯上用于表示高置信概率的区间，一般应避免使用。

8.6　当用 U 或 U_p 报告测量扩展不确定度时，除 8.3 所涉及的内容外，还应注意：

a) 明确说明被测量 Y 的定义；

b) 给出被测量 Y 的估计值 y，扩展不确定度 U 或 U_p 及其单位；

c) 必要时也可给出相对扩展不确定度 U_{rel}；

d) 对 U 应给出 k 值，对 U_p 应明确 p 值，本规范推荐给出 ν_{eff}，以便于不确定度传播到下一级。

8.7　$U = ku_c(y)$ 的报告可用以下两种形式之一，例如，$u_c(y)$ = 0.35 mg，取包含因子 $k = 2$，$U = 2 \times 0.35$ mg = 0.70 mg，则

a) m_s = 100.021 47 g，U = 0.70 mg；$k = 2$。

b) m_s = (100.021 47 ± 0.000 70) g；$k = 2$。

8.8　$U_p = k_p u_c(y)$ 的报告可用以下 4 种形式之一，例如，$u_c(y)$ = 0.35 mg，$\nu_{eff} = 9$，按 $p = 95\%$，查附录 A 得 $k_p = t_{95}(9) = 2.26$，$U_{95} = 2.26 \times 0.35$ mg = 0.79 mg，则

a) m_s = 100.021 47 g；U_{95} = 0.79 mg，$\nu_{eff} = 9$。

b) m_s = (100.021 47 ± 0.000 79) g；$\nu_{eff} = 9$，括号内第二项为 U_{95} 之值。

c) m_s = 100.021 47(79) g；$\nu_{eff} = 9$，括号内为 U_{95} 之值，其末位与前面结果内末位数对齐。

d) m_s = 100.021 47(0.000 79) g；$\nu_{eff} = 9$，括号内为 U_{95} 之值，与前面结果有相同计量单位。

8.9　不确定度也可以相对形式 U_{rel} 或 u_{rel} 报告，例如：

a) m_s = 100.021 47 $(1 \pm 7.9 \times 10^{-6})$ g；$p = 95\%$，式中 7.9×10^{-6} 为 U_{95rel} 之值。

b) m_s = 100.021 47 g；$U_{95rel} = 7.9 \times 10^{-6}$。

8.10　上述列举的表达形式中的符号含义，必要时应有文字说明，也可采用它们的名称代替符号，或同时采用。如有必要，单位的符号亦可代之以中文符号或名称。

8.11　通常在报告以下测量结果时，使用合成标准不确定度 $u_c(y)$，同时给出自由度 ν_{eff}：

a) 基础计量学研究；

b) 基本物理常量测量；

c) 复现国际单位制单位的国际比对（按有关国际规定，亦可采用 $k = 2$）。

8.12　当给出扩展不确定度 U_p 时，为了明确起见，推荐以下说明方式，例如：

$$m_s = (100.021\ 47 \pm 0.000\ 79)\ \mathrm{g}$$

式中，正负号后的值为扩展不确定度 $U_{95} = k_{95}u_c$，而合成标准不确定度 $u_c(m_s)$ = 0.35 mg，自由度 $\nu = 9$，包含因子 $k_p = t_{95}(9) = 2.26$，从而具有约为 95% 概率的置信区

间。

8.13 估计值 y 的数值和它的标准不确定度 $u_c(y)$ 或扩展不确定度 U 的数值都不应该给出过多的位数。通常 $u_c(y)$ 和 U[以及输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$] 最多为两位有效数字。虽然在某些情况下，为了在连续计算中避免修约误差而必须保留多余的位数。

在报告最终结果时，有时可能要将不确定度最末位后面的数都进位而不是舍去。例如，$u_c(y)=10.47$ mΩ，可以进位到11 mΩ。但一般的修约规则(参见《GB 3101—1993有关量、单位和符号的一般原则》)也应该可用。如 $u(x_i)=28.05$ kHz经修约后写成28 kHz。输入和输出的估计值，应修约到与它们不确定度的位数一致。例如，如果 $y=10.057\ 62$ Ω其 $u_c(y)=27$ mΩ，则 y 应进位到10.058 Ω。如果相关系数的绝对值接近1时，则相关系数应给出三位数字。

附录 A

t 分布在不同置信概率 p 与自由度 v 的 t_p（v）值（t 值）(补充件)

自由度 ν	$p \times 100$					
	68.27[a]	90	95	95.45[a]	99	99.73[a]
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

a：对期望 μ，总体标准 σ 的正态分布描述某量 z，当 $k=1$，2，3 时，区间 $\mu \pm k\sigma$ 分别包含分布的 68.27%，95.45%，99.73%。

注：当自由度较小而又有较准确要求时，非整数的自由度可按以下两种方法之一，内插计算 t 值

1）按非整 ν 内插求 $t_p(\nu)$

$$对\ \nu=6.5,\ p=0.997\,3,\ 由$$

$$t_p(6)=4.90,\ t_p(7)=4.53$$

得 $t_p(6.5)=4.53+(4.90-4.53)(6.5-7)/(6-7)=4.72$

2）按非整 ν 由 ν^{-1} 内插求 $t_p(\nu)$

例：对 $\nu=6.5,\ p=0.997\,3$，由

$$t_p(6)=4.90,\ t_p(7)=4.53$$

得 $t_p(6.5)=4.53+(4.90-4.53)(1/6.5-1/7)/(1/6-1/7)=4.72$

以上，第二种方法更为准确。

附录 B

概率分布情况的估计（参考件）

B.1 正态分布

a）重复条件或复现条件下多次测量的算术平均值的分布；

b）被测量 Y 用扩展不确定度 U_p 给出，而对其分布又没有特殊指明时，估计值 Y 的分布；

c）被测量 Y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 中，相互独立的分量 $u_i(y)$ 较多，它们之间的大小也比较接近时，Y 的分布；

d）被测量 Y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 中相互独立的分量 $u_i(y)$ 中，存在两个界限值接近的三角分布，或 4 个界限值接近的均匀分布时；

e）被测量 Y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的相互独立的分量中，量值较大的分量（起决定作用的分量）接近正态分布时。

B.2 矩形（均匀）分布

a）数据修约导致的不确定度；

b）数字式测量仪器对示值量化（分辨力）导致的不确定度；

c）测量仪器由于滞后、摩擦效应导致的不确定度；

d）按级使用的数字式仪表、测量仪器最大允许误差导致的不确定度；

e）用上、下界给出的线膨胀系数；

f）测量仪器度盘或齿轮回差引起的不确定度；

g）平衡指示器调零不准导致的不确定度。

B.3 三角分布

a）相同修约间隔给出的两独立量之和或差，由修约导致的不确定度；

b）因分辨力引起的两次测量结果之和或差的不确定度；

c）用替代法检定标准电子元件或测量衰减时，调零不准导致的不确定度；

d）两相同均匀分布的合成。

B.4 反正弦分布（U 形分布）

a）度盘偏心引起的测角不确定度；

b）正弦振动引起的位移不确定度；

c）无线电中失配引起的不确定度；

d）随时间正余弦变化的温度不确定度。

B.5 两点分布

例如，按级使用量块时，中心长度偏差导致的概率分布。

B.6 投影分布

a) 当 X_i 受到 $1-\cos\alpha$（角 α 服从均匀分布）影响时，x_i 的概率分布；

b) 安装或调整测量仪器的水平或垂直状态导致的不确定度。

B.7 无法估计的分布

大多数测量仪器，对同一被测量多次重复测量，单次测量示值的分布一般不是正态分布，往往偏离甚远。如轴尖支承式仪表示值分布，介于正态分布与均匀分布之间，数字电压表示值分布呈双峰状态，磁电系仪表的示值分布与正态分布相差甚远。

附录 C

有关量的符号汇总（参考件）

以下符号来源于 GUM；ISO 3534—1:1993；IEC27 与 ISO5725—1:1994。

a	输入量 X_i 可能值为矩形分布时的半宽；$$a = (a_+ - a_-)/2$$
a_+	输入量 X_i 的上限
a_-	输入量 X_i 的下限
b	修正值
b_+	输入量 X_i 按其估计值 x_i 的偏差的上限：$$b_+ = a_+ - x_i$$
b_-	输入量 X_i 按其估计值 x_i 的偏差的下限：$$b_- = x_i - a_-$$
cov	协方差，随机变量 y 和 z 的协方差表示为 $\mathrm{cov}(y, z) = \mathrm{cov}(z, y)$
c_i	偏导数或灵敏系数 $c_i = \partial f / \partial x_i$
f	被测量 Y 与和 Y 有关的输入量 X_i 之间的函数关系，或输出量估计值 y 与和 y 有关的输入估计值 x_i 之间的函数关系
$\partial f / \partial x_i$	偏微分（偏导数） 输入量 X_i 与被测量 Y 之间存在函数关系 f 时，X_i 之估计值量 x_i 的偏微分，恒按下式估计：$c_i = \partial f / \partial x_i \mid_{x_1, x_2, \cdots, x_N}$
k	包含因子（覆盖因子）。用于与输出量估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 相乘，以得出扩展不确定度 $U = k u_c(y)$ 的包含因子。由此，可给出一个具有较高置信概率的区间 $Y = y \pm U$
k_p	用于与输出量估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 相乘，以保证所得到的扩展不确定度 $U_p = k_p u_c(y)$ 具有某给定置信概率（置信水平）p 的包含因子
m	总平均值；被测量的个数；与被测量 y 有关的输入量 x_i 的数目
n	重复观测次数
N	与被测量 Y_i 有关的输入量 X_i 的数目
p	概率；置信概率；置信水准；置信水平：$0 \leqslant p \leqslant 1$
P(A);Pr(A)	事件 A 发生的概率
q	用概率分布描述的随机变量
$\bar{q}$	随机变化的量 q 在 n 次独立重复观测中的观测值 q_k 的算术平均值；q 概率分布均值 μ_q 或其期望的估计
q_k	随机变量独立重复观测中 q 的第 k 个观测值
r	重复性限

$r(x_i, x_j)$　输入量 X_i 与 X_j 的输入估计值 x_i 与 x_j 的估计相关系数：

$$r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j)/u(x_i)u(x_j)$$

$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$　通过输入量 X_i 和 X_j 的 n 对独立同时重复观测值 $X_{i;k}$ 和 $X_{j;k}$ 所确定的输入均值 $\overline{X}_i$ 和 $\overline{X}_j$ 的估计相关系数：

$$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$$

$r(y_i, y_j)$　在同一测量程序中所确定的两个或多个输出量或是被测量中，输出估计量 y_i 与 y_j 的估计相关系数

R　复现性限（再现性限）

s_p^2　方差的组合样本估计值

s_p　组合样本标准差；等于 s_p^2 的正平方根

s_r　重复性标准差

s_R　复现性标准差（再现性标准差）

$s^2(\bar{q})$　算术平均值 $\bar{q}$ 的实验方差，它是算术平均值 $\bar{q}$ 方差 σ^2/n 的估计值。方差由 A 类评定方法获得

$s(\bar{q})$　算术平均值 $\bar{q}$ 的实验标准差，等于 $\bar{q}$ 实验方差 $s^2(\bar{q})$ 的正平方根；$s(\bar{q})$ 是总体标准差 $\sigma(\bar{q})$ 的有偏估计；为 A 类评定方法获得的标准不确定度

$s^2(q_k)$　变量 q 的 n 次独立重复测量值 q_k 所得到的方差的样本估计，是变量 q 的概率分布的总体方差 σ^2 的估计

$s(q_k)$　实验标准差或样本标准差，等于样本方差 $s^2(q_k)$ 的正平方根；它是变量 q 的概率分布的总体标准差 σ 的有偏估计

$s^2(\overline{X}_i)$　输入量 X_i 的均值 $\overline{X}_i$ 的实验方差，由 X_i 的 n 次独立重复观测值 $X_{i,k}$ 所得出；A 类评定方法获得的方差

$s(\overline{X}_i)$　输入量 X_i 的均值 $\overline{X}_i$ 的实验标准差，等于方差 $s^2(\overline{X}_i)$ 的正平方根。由 A 类评定方法所获得的标准不确定度

$s(\bar{q}, \bar{r})$　均值 $\bar{q}$ 与 $\bar{r}$ 的协方差的估计。这两个均值是两随机变量 q 与 r 的期望 μ_q 和 μ_r 的估计，而且它们是由 n 对独立同时重复观测 q_k 和 r_k 所计算出的；协方差由 A 类评定方法所获得。$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r})$

$s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$　输入量 X_i 和 X_j 的均值 $\overline{X}_i$ 和 $\overline{X}_j$ 的协方差的估计。它们由 n 对独立同时重复观测值 $X_{i,k}$ 和 $X_{j,k}$ 所得出；协方差由 A 类评定方法所获得

$t_p(\nu)$　t －因子（t －factor）。它按所给定的概率 p 与已知的自由度 ν 给出

$t_p(\nu_{\text{eff}})$　对于有效自由度 ν_{eff} 以及与给定概率 p 相应的 t 分布的 t 值。它用于计算扩展不确定度 U_p

$u^2(x_i)$　输入量 X_i 的估计值 x_i 的估计方差

注：当 x_i 由 n 次重复观测值的算术平均值得出时：

$$u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$$

即自A类评定方法所获得的方差

$u(x_i)$　输入估计值 x_i 的标准不确定度。x_i 是输入量 X_i 的估计。$u(x_i)$ 等于方差 $u^2(x_i)$ 的正平方根

注：当 x_i 是由 n 次独立重复测量的算出时：

$$u(x_i) = s(\overline{X}_i)$$

即自A类评定方法所获得的标准不确定度（A类标准不确定度）

$u(x_i, x_j)$　两输入量 X_i 和 X_j 的输入估计值 x_i 与 x_j 的估计值协方差

注：x_i 与 x_j 是从 n 次独立同时重复观测值算出时，有：

$$u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$$

即是从A类评定方法所获得的协方差

$u_c^2(y)$　输出估计值 y 的合成方差

$u_c(y)$　输出估计值 y 的合成标准不确定度，等于合成方差 $u_c^2(y)$ 的正平方根

$u_{cA}(y)$　输出估计值 y 的所有按A类评定方法所确定的标准不确定度以及协方差的合成标准不确定度(A类合成标准不确定度)

$u_{cB}(y)$　输出估计值 y 的所有按B类评定方法所确定的标准不确定度以及协方差的合成标准不确定度(B类合成标准不确定度)

$u_c(y_i)$　在同一测量程序中，有两个或两上以上的被测量或输出量 y_i 时，输出估计值 y_i 的合成标准不确定度

$u_i^2(y)$　由输入估计值 x_i 的估计方差 $u^2(x_i)$ 所形成的估计值 y 的合成方差 $u_c^2(y)$ 的分量：

$$u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$$

$u_i(y)$　由输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$ 产生输出估计值 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的分量 $u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$

$u(y_i, y_j)$　输出估计值 y_i 与 y_j 的估计协方差(在同一测量程序中的输出估计值 y_i 与 y_j)

$u(x_i)/|x_j|$　输入估计值 x_i 的相对标准不确定度，也用 $u_{rel}(x_i)$

$u_c(y)/|y|$　输出估计值 y 的相对合成标准不确定度，也用 $u_{crel}(y)$

$[u(x_i)/x_i]^2$　输入估计值 x_i 的估计相对方差，也用 $u_{rel}^2(y)$

$[u_c(y)/y]^2$　输出估计值 y 的相对合成方差，也用 $u_{crel}^2(y)$

$\dfrac{u(x_i, x_j)}{|x_i, x_j|}$　输入估计值 x_i 和 x_j 的估计相对协方差，也用 $u_{rel}(x_i, x_j)$

u_{rel}；u_r　相对标准不确定度

U　提供一个置信区间 $Y = y \pm U$ 的输出估计值 y 的扩展不确定度。它等于包含因子 k 与 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 之积：

$$U = ku_c(y)$$

U_p　以置信概率 p 提供置信区间 $y = y \pm U_p$ 的输出估计值 y 的扩展不确定度。它

	等于包含因子 k_p 与合成标准不确定度 $u_c(y)$ 之积： $u = k_p u_c(y)$
U_{rel}；U_r	相对扩展不确定度，相对展伸不确定度
U_{prel}；U_{pr}	置信概率 p 的置信区间相对半宽度；概率为 p 的相对扩展不确定度
x_i	输入量 X_i 的估计值 注：当 x_i 是由 n 次独立重复观测值的算术平均值得出时： $x_i = \overline{X}_i$
X_i	与被测量 Y 相联系的第 i 个输入量 注：X_i 可以是物理量或随机变量
$\overline{X}_i$	输入量 X_i 的估计值，等于 X_i 的 n 次独立重复观测量值 $X_{i,k}$ 的算术平均值
$X_{i,k}$	输入量 X_i 的第 k 个独立观测值
y	被测量 Y 的估计值；测量结果；输出估计值
y_i	在同一测量程序中，当有两个或多个被测量要测出时，被测量 Y_i 的估计值
$\bar{y}$	被测量 Y 测量结果的算术平均值
$\bar{\bar{y}}$	$\bar{y}_i$ 的平均值；y_i 的总平均值
δ	分辨力；修约间隔
μ_q	随机变量 q 概率分布的期望或均值；数学期望；总体平均值
ν	自由度的一般符号
ν_i	输入估计值 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$ 的自由度
ν_{eff}	在计算扩展不确定度 U_p 时，为得到 t— 因子 $t_p(\nu_{eff})$，合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的有效自由度
ν_{effA}	所有通过 A 类评定方法所获得的标准不确定度分量合成后，成为一个 A 类标准不确定度的有效自由度，即 $u_{cA}(y)$ 的有效自由度
ν_{effB}	所有通过 B 类评定方法所获得的标准不确定度分量合成后，成为一个 B 类标准不确定度的有效自由度，即 $u_{cB}(y)$ 的有效自由度
$\sigma^2(q)$	随机变量 q 概率分布的方差，用 $s^2(q_k)$ 估计
σ	概率分布的标准差；标准差的真值。等于 σ^2 的正平方根，$s(q_k)$ 为 σ 的有偏估计值
$\sigma^2(\bar{q})$	$\bar{q}$ 的方差，等于 σ^2/n，由 $s^2(\bar{q})$ 估计： $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\bar{q})$	$\bar{q}$ 的标准差，等于 $\sigma^2(\bar{q})$ 的正平方根；$s(\bar{q})$ 为 $\sigma(\bar{q})$ 的有偏估计
$\sigma^2[s(\bar{q})]$	$\bar{q}$ 的实验标准 $s(\bar{q})$ 的方差
$\sigma[s(\bar{q})]$	平均值 $\bar{q}$ 的实验标准差 $s(\bar{q})$ 的总体标准差，等于 $\sigma^2[s(\bar{q})]$ 的正平方根
$\dfrac{\sigma\{u(x_i)\}}{u(x_i)}$	标准不确定度 $u(x_i)$ 的相对不确定度，用于评定B类标准不确定度的自由度

附录 D

术语的英汉对照（参考件）

arithmetic mean (or average)　算术平均值

central limit theorem　中心极限定理

combined standard uncertainty　合成标准不确定度

confidence interval　置信区间

confidence level　置信概率，置信水平（置信水准）

confidence limit　置信限

correlated input estimates or quantities　相关输入估计值或量

correlated output estimates or quantities　相关输出估计值或量

correlation　相关

correlation coefficient　相关系数

covariance　协方差

degrees of freedom　自由度

degrees of freedom, effective　有效自由度

distribution, a priori　先验分布（主观分布）

distribution, Laplace-Gauss　拉普拉斯-高斯分布

distribution, normal　正态分布

distribution, probability　概率分布

empirical model　经验模型

estimation　估计，估计值

estimate　估计

estimator　估计量

expanded uncertainty　扩展不确定度（展伸不确定度）

expectation　期望

expectation　期望值

independence　独立

input estimate　输入估计值

input quantity　输入量

law of propagation of uncertainty　不确定度传播律

level of confidence　置信概率，置信的水平，置信水准（置信水平）

mathematical model of the measurement　测量数学模型

output estimate　输出估计值

output quantity　输出量

probability　概率

random effect　随机效应

random variable　随机变量

related standard uncertainty　相对标准不确定度

related combined standard uncertainty　相对合成标准不确定度

related expanded uncertainty　相对扩展不确定度，相对展伸不确定度

repeatability conditions　重复性条件

repeatability limit　重复性限

sensitivity coefficient　灵敏系数

standard deviation　标准［偏］差

statistic control　统计控制

systematic effect　系统效应

t – factor　*t* 因子

t – distribution　*t* 分布

Type A standard uncertainty　A 类标准不确定度

Type B standard uncertainty　B 类标准不确定度

variance　方差

variance, analysis of　方差分析

variate　随机变量

Welch – Satterthwaite formula　韦尔奇–萨特思韦特式（W–S 式）

中华人民共和国
国家计量技术规范
测量不确定度评定与表示
JJF1059—1999
国家质量技术监督局颁布

*

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲2号
邮政编码 100013
北京市迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

880 mm×1230 mm 16开本 印张2.5 字数48千字
1999年4月第1版 1999年4月第1次印刷
印数1—4 000
统一书号155026-1063